

これまでの研究成果のまとめ

安田 貴徳

G を数体 k 上の連結半単純代数群とする。 \mathbb{A} を k のアデル環としたとき、 $G(k)\backslash G(\mathbb{A})$ は局所コンパクト空間の構造を持ち、さらに $G(\mathbb{A})$ -不変測度を持つ。これにより $G(k)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の二乗可積分関数の空間 $L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ が考えられる。これに $G(\mathbb{A})$ の右側正則作用で入る表現は

$$L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A})) = L_{\text{disc}}^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A})) \oplus L_{\text{cont}}^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$$

と、極大完全可約閉部分空間 $L_{\text{disc}}^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ とその直交補空間 $L_{\text{cont}}^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ の直和で書かれる。私はある特定の半単純代数群 G に対し、密接な関係にある留数スペクトルと CAP 形式のなす空間という2つの $L_{\text{disc}}^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ の $G(\mathbb{A})$ -不変部分空間の構成、およびその表現としての既約成分の決定を行った。具体的に解説しよう。まず G としては k 上の四元数体 R 上の2次元双曲エルミート空間のユニタリ群を取る。これは $Sp(2)$ の内部形式となる。 $L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ の元 ϕ が L^2 -cusp 形式であるとは G と異なる全ての k -放物型部分群に対し、それに沿う ϕ の定数項が消えているときを言う。 L^2 -cusp 形式のなす空間 $L_0^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ は $L_{\text{disc}}^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ の部分空間となることが知られている。

留数スペクトルとは $L_0^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ の $L_{\text{disc}}^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ における直交補空間 $L_{\text{res}}^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ のことである。留数スペクトルに関しては k が総実であるときその既約分解を完全に決定することができた。既に留数スペクトルの既約分解が決定されている例として $GL(n)$, $Sp(2)$, $U(2, 2)$ などが挙げられる。その他部分的に決定されているものもあるが、共通しているのはいずれも quasisplit な代数群であるということである。既約分解の決定には Langlands による Eisenstein 級数のスペクトル理論が使われるため Eisenstein 級数の解析的な挙動を知る必要がある。quasisplit であればこの解析挙動を Langlands-Shahidi 理論により調べることができるのである。ところが私の扱う代数群 G は quasisplit ではない。そこで Jacquet-Langlands 対応を用いて G に対する Eisenstein 級数の解析挙動の問題を $Sp(2)$ の場合の Langlands-Shahidi 理論に帰着させ、この点を解決した。留数スペクトルの既約成分のいくつかは Langlands 分類で決定することができるがそれ以外は階数1の歪エルミート空間のユニタリ群の自明表現のテータリフトで構成できた。

私が扱ったもう1つの空間、CAP形式のなす空間とは $L_0^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ の部分空間である。CAP形式とは留数スペクトルの既約成分とほとんど全ての素点で同じ Hecke 固有値の絶対値を共有している L^2 -cusp 形式のことである。これに関しては全てではないが多くの例を構成することができた。 $GSp(2)$ の場合、Piatetski-Shapiro が CAP 形式の例として齋藤黒川表現を構成し、Soudry がその他の CAP 形式を決定した。CAP が "Cuspidal Associated to Parabolic" の略であることからわかるように CAP 表現には G の放物型部分群が付随する。しかし、これらの放物型部分群は k 上定義されている必要はない。私が構成した CAP 形式は2種類ある。1つ目は R 上 determinant 1 を持つ2次元歪エルミート空間 V のユニタリ群 $U(V)$ の CAP 表現からのテータ対応により作られる。これは齋藤黒川表現や Howe と Piatetski-Shapiro によって作られた例の内部形式版にあたるものであり、付随する G の放物型部分群も k 上定義されたものになる。もう一つの構成例は R 上1次元歪エルミート空間のユニタリ群の保型表現からのテータ対応で作られる。これにあたる $Sp(2)$ の保型表現は留数スペクトルに多く現れ、また、付随する G の放物型部分群は k 上定義されてない。Arthur の予想によると G の CAP 表現は齋藤黒川表現の一部を除くとこれらの方法で全てが構成されたことになる。

G の留数スペクトルおよび CAP 形式には "重複度1" が成り立たないものが存在する。このような現象は $Sp(2)$ の場合起こらない。このようなことが起こる原因は歪エルミート空間に関する Hasse 原理の不成立にある。すなわち大域的には等距でない2つの歪エルミート空間で局所的には全て等距になるものが存在する。このような歪エルミート空間達からテータリフトで得られる CAP 形式達は空間としては違っても表現として同じ場合がある。このようにして得られた重複度は Arthur の重複度予想と一致している。