

研究計画

蒲谷祐一

Ideal points 論文 [2] ではトラスである 3 次元多様体の ideal point の発見法を提示した。ただこの方法では見つからない ideal point が存在する事もわかっている。この点を改良するのが今後の課題である。具体的には ideal point において、ある理想四面体が退化しない場合が扱えない。この場合についても私の方法を一般化したい。例えば ideal point において表現の体積が 0 でない例などは退化しない理想四面体が存在するときにおこる。Ideal point において体積が 0 でない時には torus 分解が起こっている可能性が高いため toroidal surgery の研究に応用できると考えている。実際 $(-2, p, q)$ -pretzel 結び目の研究では $2(p + q)$ -slope に対応する ideal point では表現の体積が 0 ではなく、torus 分解を持ち、その片方は双曲構造を持つことがいくつかの p, q で解った。このような興味深い ideal point に対しても適用できる方法を見つけたい。また単純により多くの ideal point が見つければ Culler-Shalen ノルムと呼ばれる重要な不変量が計算できる。Culler-Shalen ノルムから cyclic surgery や finite surgery に関する情報が読み取れるため、この研究は双曲多様体の exceptional surgery の研究への応用がある。研究成果で述べた pretzel knot の finite surgery の結果は、まさにこの方法がうまくいった場合であった。さらに多くの ideal point を見つける方法があれば適用範囲も広がる。

また境界がいくつかのトラスからなる場合に私の定理を定式化する事も考えられる。この場合、1つの境界成分を除いて Dehn surgery を行うと境界が1つのトラスである多様体を調べる事と同じになる。このようにして無限の多様体の系列に対して ideal point を計算する事が可能になる。特に census manifold と呼ばれる少ない理想四面体で分割できる多様体を調べるのが面白いだろう。これらの多様体は‘小さい’ので exceptional surgery を多く含む。また最近の Gabai-Meyerhoff-Milley の結果により、体積の小さい one-cusped 双曲多様体は census manifold から得られる事が知られている。このような特徴的な多様体の族に対して理論を適用する事で、体積と ideal point、さらに体積と表現空間の関係がわかれば非常に面白い結果であると思う。

Higher genus boundary case より大きな目標として以上の ideal point の解析の方法を境界の種数が 2 以上の場合に応用することを計画している。Pre-Bloch 不変量の論文の中で私は曲面とパンツ分解の組に対して自然な $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現のパラメータ付けの方法を与えた。このパラメータ付けに対して自然なコンパクト化を与えたい。私のパンツ分解によるパラメータの入れ方は measured lamination の Dehn-Thurston 座標と類似しているため、コンパクト化した点と measured lamination の様な量が対応しているもおかしくない。ここで Morgan-Shalen により曲面の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現のコンパクト化が既に与えられている事を注意しておく。私の ideal point の論文は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現の空間を無限遠点でみることにより部分的には combinatorial な対象に帰着させる事ができるという事を言っている。上記の measured lamination の空間も Teichmüller 空間 (これは曲面の基本群の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ の表現の空間の部分集合) を無限遠点 (コンパクト化) で見えるものであり、そこでは train track という combinatorial な対象として扱われる。我々の状況でも ideal point の退化に対応して各理想四面体の中に曲面を置くと、その境界には自然に train track の様なものが描けるので自然なコンパクト化があってもおかしくないと考えている。

Exceptional surgeries Finite surgery の仕事の続きとして、他の exceptional surgery についても結果が出せる可能性が高い。Culler-Shalen norm の評価を用いて Seifert surgery の非存在も言える事が知られている。Ideal point を見つけることで Seifert surgery に関する結果も出したいと考えている。例えば $(-2, p, q)$ -pretzel knot の Seifert surgery に関しての結果は特別な場合しか知られていないので調べる価値がある。共同研究の結果で exceptional surgery の候補は相当しぼられているのでやりやすいと言える。また Culler-Shalen ノルムを利用しない exceptional surgery の研究も考えられる。Ideal triangulation を利用して $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現の変形を調べる方法は具体的に双曲構造がどのように変形するかが見やすいという利点がある。例えば双曲構造から Seifert fibered 構造に変化する様子が具体的に見える場合がある。また特殊な場合として cone manifold の変形の退化についても調べてみたい。