研究成果

蒲谷祐一

pre-Bloch 不変量 (論文 [1])　Neumann-Yang により有限体積双曲３次元多様体に対して Bloch 群に値をとる Bloch 不変量が定義された。論文 [1] では Neumann-Yang により定義された Bloch 不変量を３次元多様体の境界の種数が２以上の場合に拡張し、その基本的な性質を明らかにした。

M を種数 g の境界を持つコンパクト３次元多様体、ρ をその基本群の $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 表現、C を境界の曲面のパンツ分解、$\mathfrak{o}$ を各パンツの境界の閉曲線の向きとする。パンツ分解 C に付随した M の理想四面体分割を定義した。この理想四面体分割から pre-Bloch 群の元が定まる。これを $\beta(M,\rho,C,\mathfrak{o})$ と書く。この量が分割の取り方によらない表現の不変量である事を示した。また曲面にパンツ分解が与えられたときに、曲面の $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 表現のパラメータ付けの方法を与えた。各パンツの境界の閉曲線のホロノミーの固有値 $H_k (k=1,\ldots,3g-3)$ とそこでの二つのパンツの表現の張り合わせの twist を測る twist parameter W_k を定義した。このパラメータ付けは Fenchel-Nielsen の length-twist パラメータを $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 表現に対して一般化したものでありこれ自体に意義があると考えている。またこれらのパラメータを用いて、$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 表現の体積の変分公式を示した。

$$d\mathrm{Vol} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3(g-1)}\big(\log|W_k|\,d\arg(H_k) - \log|H_k|\,d\arg(W_k)\big).$$

Itdeal points の計算法 (論文 [２])　M を３次元多様体で境界が１つのトーラスであるものとする。論文 [２] では M の (位相的) 理想四面体分割 K から character variety の ideal point を計算する方法を与えた。理想四面体分割の観点から ideal point を見つける研究として Yoshida の仕事があり、ideal point が満たすべき線型方程式を与えている。ただ Yoshida の論文で与えられているのは ideal point が満たす必要条件で、その必要条件をみたす ideal point の候補が本当に ideal point であるかを判定する必要がある。私は Yoshida の方法で見つかる ideal point の候補が実際に ideal point を与えることを保証する判定条件を与えた。

私の与えた判定条件は計算機を用いて実行できる形のものであるので、実際にプログラムを書いて多くの例に関して ideal point の計算をした。結び目の補空間の場合に興味深い例を見つけた。前述のように Culler-Shalen の理論により ideal point に対応した圧縮不可能曲面が見つかる事が知られている。圧縮不可能曲面の境界のスロープは boundary slope と呼ばれ大変よく研究されている対象である。そこでこの方法を用いて結び目の boundary slope を計算してみると次のような例が見つかった：

- Alternating knot の boundary slope で偶数でない slope を発見した。さらに整数でないものも発見した。(Montesinos knot で alternating な結び目の boundary slope はすべて偶数である。)
- Boundary slope の集合の diameter は交点数の２倍で押さえられるという予想があるが、この条件を満たさない結び目の例を見つけた。

Finite surgeries on three-tangle pretzel knots (論文 [３])　Futer, Ishikawa, Mattman, Shimakawa 氏との共同研究で $(-2,p,q)$-pretzel 結び目は $(-2,3,7)$、$(-2,3,9)$ を除いて非自明な finite surgery が存在しないことを示した。主に次の３つの手法を用いた:

- Dehn surgery によって $(-2,p,q)$-pretzel を生む link を考える。その link の補空間の双曲構造を決定し、さらに cusp cross section の取り方を調べることによって Agol-Lackenby による 6-theorem を適用する。
- $(-2,p,q)$-pretzel 結び目の補空間の基本群から、ある無限群への全射を構成する。
- Culler-Shalen ノルムを評価し、Boyer-Zhang の結果を適用する。

Culler-Shalen ノルムを評価する部分では、ある $(-2,p,q)$-pretzel 結び目の ideal point を見つける必要がある。その部分では論文 [2] の結果を用いている。