

今後の研究計画

黒木慎太郎

研究所員の間は GKM 多様体 (特に Equivariantly formal space) を中心として研究を進めていく予定です. GKM 多様体とは (ここでは) トーラスが作用する偶数次元の多様体で, 軌道空間の中で不動点と 1 次元の軌道からなる集合がグラフ, 頂点と辺 (leg になっても良い), の形をなす物をいいます. 単純な仮定ですが, これは多様体全体の集合の中でもとても広大なクラスを成します. 例えば, トーラス多様体は GKM 多様体の一部ですが, 単純 n 次元凸多面体と任意の n 次元多様体を連結和したものを軌道空間として持つようにトーラス多様体を構成することができます. その意味で GKM 多様体の成すクラスには多様体が全て現れてくると言うことができます. 故に全体ではとらえどころのないような代物ですが, Goresky-Kottwitz-MacPherson (GKM) は 1998 年に Equivariantly formal という GKM 多様体の中でも良い性質を持つクラスを提唱しました. GKM 多様体 M が Equivariantly formal space とは (ここでは) その equivariant cohomology が $H_T^*(M) \simeq H^*(M) \otimes H^*(BT)$ をなすようなクラスをいいます. これは技術的な仮定のように見えますが, GKM 達はこの性質を持つクラスが Koszul duality functor によって equivariant cohomology と ordinary cohomology が対応する必要十分なクラスだと言うことを示しました. つまり, Equivariantly formal space は数学的に意味のあるクラスをなしていると言えます.

実際の研究においても Masuda-Panov 等が Equivariantly formal なトーラス多様体上で, また hypertoric variety に関して Konno や Harada, Holm, Proudfoot 等が, その equivariant cohomology や幾何的な性質に関して非常に綺麗な結果を出しています. また, Grassmann 多様体上への自然なトーラス作用も Equivariantly formal space で, これらについても Schubert calculus 等の綺麗な研究がたくさんあります. それらの研究から, Equivariantly formal ならば綺麗な結果を得ることが期待できます. しかしながら上記以外のクラスについてはあまり研究が進んでいないようにも感じます. そこでこの分野での興味深いと思われる研究の一つは Equivariantly formal の中の新しいクラスを探ることになると思います. 期間中は特に hypertoric variety の拡張に当たるようなクラスを探したいと思います (詳しくは以前の研究計画も参照してください).

二つ目は, GKM 多様体上の拡張作用の研究をもう少し深める方向性で研究をやりたいと思っています. 論文 (4), (6), (7), (9) の中で, トーラス多様体上での拡張作用を研究しましたが, もっと一般的に (先の論文での研究とは違う方向で) 深い結果が出せると感じています. また, 拡張作用は $\text{Diff}(M)$ の中にある群と見なすことが可能ですが, $H^*(\text{BDiff}(M); \mathbb{Q})$ の環構造の計算もやりがいがある, 拡張作用の問題にも通じる問題なので, できそうならば計算してみたいと思います.

三つ目は, GKM 多様体から定義される組み合わせ的な対象 (グラフ, 多面体やマトロイド等) から組み合わせ論への応用を探りたいと思います. 今までの大きな応用は Stanley の g -定理だと思いますが, それ以外にもまだまだ沢山の応用が隠れているはずだと思っています. 例えば上述の拡張作用 (特に擬トーリック多様体上の) に対応した組み合わせ論は単純凸多面体から次元の低い多面体への射影の問題になります. また, GKM グラフへ (幾何構造, 例えば omniorientation, を用いて) 彩色することで, グラフの彩色に関する問題へも応用があるかもしれません.

最後に, Equivariantly formal でなければ, equivariant cohomology は ordinary cohomology には対応しないので一般の GKM 多様体の研究には ordinary cohomology を考えるよりも対応する model を考えて, それを用いて研究した方が自然なのかも知れません. きっかけがあればそのような model についても研究してみたいと思っています.