研究計画書

境 圭一
東京大学大学院数理科学研究科 特任研究員，大阪市立大学数学研究所（兼任）所員
ksakai@ms.u-tokyo.ac.jp

$\mathbb{R}^n$ 内の long j-knot のなす空間 $\mathcal{K}_{n,j}$ の位相幾何学的な性質について，これまでの研究を踏まえ，引き続き多重ループ空間としての構造を中心に，関連する内容と合わせて研究をしていきたい．当面は (1), (2) を，中・長期的に (3) を考えたい．

(1) $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n,1}$ について．$\mathcal{K}_n$ のトポロジーを（コ）ホモロジーの観点から調べる手段として，私は特に operad の作用を用いるもの [1]，配置空間積分を用いるもの [4] に注目している．これらに関して，基本的な問題は次の二つである．これらの解決を目標の一つとしたい．

予想． (1) $n > 3$ のとき，$H_*(\mathcal{K}_n)$ は自由 Poisson 代数である．
(2) 配置空間積分の方法により，$H^*_{DR}(\mathcal{K}_n)$ はグラフ・コホモロジーから全て復元される．

(1) は $\mathcal{K}_n$ の二重ループ空間としてのホモトピー型に関する情報を与えるし，(2) は Vassiliev らにより導入されたスペクトル系列の（$\mathbb{R}$ 上での）E^1 退化性の幾何学的な証明に繋がるなど，トポロジーや組み合わせ的な観点からも重要である．どちらの予想も（コ）ホモロジー類の非自明性に関する予想であるから，Kronecker 積を通して，これらを同時に扱うことができる．方法としては，$H^*_{DR}(\mathcal{K}_n)$ に定義されるはずの co-Poisson 代数構造をグラフ複体のレベルで実現し，これらの構造を使って Kronecker 積を次数に関して帰納的に計算する方法を考えたい．実際に Kronecker 積を計算するときには，私の計算例 [6] の方法が適用される．グラフ複体上の co-Poisson 代数構造を考えるためには，グラフの組み合わせ論，Hochschild 複体上の (co-)Poisson 代数構造 [8] との比較などを行いたい．

(2) $\mathcal{K}_{n,j}$ への拡張．(1) と同様の構成は $\mathcal{K}_{n,j}$ にも適用されると考えられる．しかし [1, 9] 等の研究はあるものの，$\mathcal{K}_{n,1}$ の場合に比べて進んでいないのが現状である．配置空間積分や “Goodwillie calculus”[7] により $H^*(\mathcal{K}_{n,j})$ を記述する「代数モデル」を構成し，$\mathcal{K}_{n,j}$ の多重ループ空間としての構造を調べるための足がかりを用意したい．どのようなグラフを考えるべきか，という点がまだはっきりしないが，私が [5] で行ったように，Haefliger 不変量などの古典的な結び目不変量の構成を通して，適切なグラフを探していきたい．

これらの構成は，$\mathcal{K}_{n,j}$ のトポロジーを調べるだけでなく，$\mathcal{K}_{n,1}$ との関連を調べる上でも重要と考えている．[2] では，R. Litherland の “deform-spun” 構成による写像 $\Omega\mathcal{K}_{n-1,j-1} \to \mathcal{K}_{n,j}$ （Ω はループ空間を表す）や,「懸垂写像」$\Sigma\mathcal{K}_{n,j} \to \mathcal{K}_{n+j,j}$ などが構成され，いくつかの性質について調べられている．特に前者については，多重ループ空間の構造と両立することも示されている．これらの写像によって，比較的よくわかっている $\mathcal{K}_{n,1}$ から $\mathcal{K}_{n,j}$ の情報を取り出せる可能性が出てくる．このような関係を代数的に捉えるための手段としても，グラフ複体のような「代数モデル」を構成し，その上で対応する写像を定義することを考えている．

(3) 低次元トポロジーとの関係．配置空間積分によって三価グラフから得られるコホモロジー類は，3 次元内の結び目や 3 次元多様体に対する有限型不変量に対応するものである．しかし，三価でないグラフが何に対応するのかは全く明らかでない．[3] においては，$\mathcal{K}_3$ の連結成分について，その 1 次ホモロジーが自明であることと対応する long knot が自明なことが同値であることが示された．同様に，三価でないグラフから得られるコホモロジー類が，結び目のどのような性質に対する「障害類」となるのかを考えたい．この問題に取り組むにあたって，まず三価でないグラフから $H^*_{DR}(\mathcal{K}_n)$ の元をなるべく多く構成することが必要であると考えている．

また，[7] 等の結果から，点配置空間 $\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^n, k)$ のホモトピー群を用いて $\pi_*(\mathcal{K}_n)$ に収束するスペクトル系列が構成される．$\pi_*\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^n, k)$ のなす Lie 代数は純組みひも群の降中心列に付随する Lie 代数と一致する．これはまた（余）単体的群ともみなされ，純組みひもに対する Vassiliev 不変量や，球面のホモトピー群などと関連することがわかっている．スペクトル系列を通して，これらの対象と $\mathcal{K}_n$ のトポロジーの関わりを調べたい．例えば，上記の単体的群の幾何学的実現のトポロジーを使って，スペクトル系列の性質や具体的な計算について考えたい．

References

[1] R. Budney, *Little cubes and long knots*, Topology **46** (2007), 1–27.
[2] ———, *A family of embedding spaces*, Geom. Topol. Monogr. **13** (2008), 41–84.
[3] R. Budney and F. R. Cohen, *On the homology of the space of knots*, Geom. Topol. **13** (2009), 99–139.
[4] A. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, and R. Longoni, *Configuration spaces and Vassiliev classes in any dimensions*, Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 949–1000.
[5] K. Sakai, *Configuration space integral for embedding spaces and the Haefliger invariant*, math:0811.3726.
[6] ———, *Nontrivalent graph cocycle and cohomology of the long knot space*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), 1499–1522.
[7] D. Sinha, *Operads and knot spaces*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), no. 2, 461–486.
[8] V. Tourtchine, *On the other side of the bialgebra of chord diagrams*, J. Knot Theory Ramifications **16** (2007), no. 5, 575–629.
[9] T. Watanabe, *Configuration space integral for long n-knots and the Alexander polynomial*, Algebr. Geom. Topol. **7** (2007), 47–92.