

これまで強擬凸多様体を対象として、その幾何学の研究を進めてきましたが主要な結果は、完備強擬凸多様体におけるベクトル束値の Serre 双対定理 [1],[2]、劣楕円型 Monge-Ampère 方程式に対する連続法 [3]、強擬凸多様体間の J -正則写像に関する特異点除去定理 [4] であります。強擬凸多様体の具体例としては、複素多様体の中の実超曲面 (強擬凸領域の境界) や定曲率多様体上の接球束が挙げられますが、強擬凸多様体上には接触構造から定まる非退化な 2 形式と可積分な概複素構造 J が存在するためにコホモロジーの Hodge 分解や佐々木多様体における $\partial\bar{\partial}$ -補題をはじめとして symplectic 幾何学や複素幾何学で成立する性質に類似する性質が成立することは良く知られています。とくに私は、これまでに強擬凸多様体の幾何学を symplectic 多様体など偶数次元の多様体との類似点を基本的な視点として研究を進めてきました。

コホモロジーの Serre 双対定理 は複素幾何学における基本的な定理の一つであり、コホモロジーの消滅定理などと組み合わせることにより、コホモロジー計算の基礎になっています。この定理のコンパクト強擬凸多様体における類似的結果は自明束の場合には N.Tanaka により得られていましたが、私は複素幾何学との類似を考える上では、非自明なベクトル束に対しての Serre 双対定理の成立を示すことも重要であると考えました。さらに、この Serre 双対定理の非コンパクト多様体への拡張が [2] の結果となっています。強擬凸多様体は Carnot-Carathéodori 距離と呼ばれる距離を持ち、この距離に関する完備性が Laplacian の対称性に影響を及ぼすことが共同研究者である J.Masamune によって示されていましたが、この事実を用いることにより完備な強擬凸多様体においても類似的定理を示すことができました。

強擬凸多様体の幾何学においては、その概複素構造 J が可積分条件を満たすことから複素幾何学との類似も多く成立しますが、とくに強擬凸多様体の特性ベクトル場が Killing となる佐々木多様体の幾何学では、接触分布に横断的な座標を用いることで Kähler 幾何学と強い類似を持つことも良く知られています。

Kähler 幾何学における古典的な問題である Calabi 予想は、近年の Sasaki-Einstein 計量の存在に関する問題として取り上げられることもしばしばありますが、佐々木多様体上では横断的構造を用いた議論により Kähler 幾何学に帰着できることが知られています。私はこの問題を一般の強擬凸多様体において横断的構造を用いずに考察を試みましたが、直接的に強擬凸多様体上の Monge-Ampère 方程式を解くためには現在のところ技術的に佐々木多様体になるための条件が必要な状況になっています [3]。

投稿中のプレプリント [4] にまとめた結果は、M.Gromov によって始められ symplectic 幾何学で大きな発展をしている 擬正則曲線を 用いた理論 を強擬凸多様体の幾何学に類似的に構成しようという試みにおける結果の一つであり、強擬凸多様体間の J -正則写像の性質に関する結果となります。symplectic 幾何学における擬正則曲線の理論はモジュライ空間がコンパクトとなることにより量子コホモロジーや不変量の定義など様々な応用を得ることが出来ていますが、このようなコンパクト化を行う際に擬正則曲線の極限を考察する必要があり、この考察において J -正則曲線に関する特異点の除去は非常に重要な役割を持っていました。強擬凸多様体においては更に、symplectic 多様体には存在しない特性方向へ J -正則写像を動かすときの極限を考察する必要性が生じます。プレプリント [4] では J -正則写像の定義域が 3 次元佐々木多様体であるときは、この方向への動きを定義域におけるパラメタ変換により制御できることを示すことで特異点除去定理の証明を行いました。