今後の研究計画

新庄玲子

応募者は, 空間グラフ (結び目等を含む) の図式から計算可能な代数的不変量と空間グラフ (結び目等を含む) の幾何的な性質との関連および, それを用いた分類問題に興味を持ち, 研究を行っている. 今後の研究として, 次の 3 つを計画している. 以下, 論文番号等は研究業績書に一致する.

(1) 結び目および絡み目の図式の補領域に関する結果の空間グラフの図式への拡張を行う.

2 次元球面 $\mathbb{S}^2$ 上の結び目または絡み目図式 D は, 上下の情報を忘れることで, $\mathbb{S}^2$ 上の 4-正則グラフとみなすことができる. このグラフは $\mathbb{S}^2$ をいくつかの面に分割する. 論文 [9] では, この面を図式 D の補領域とよび, その形 (何辺形であるか) と, 奇数辺形の個数に着目して考察した. その際, オイラーの公式と, (上下を忘れた) 結び目および絡み目図式が 4-正則グラフであることから導かれる,

$$2p_2(D) + p_3(D) = 8 + p_5(D) + 2p_6(D) + 3p_7(D) + \cdots . \quad (*)$$

という関係式が重要であった ($p_n(D)$ は D の n 辺形の個数を表す). しかし空間グラフの場合, 埋め込むグラフが 4-正則グラフでなければ, $(*)$ は成立しない. そのため, [9] で与えた結果の拡張を考えるのであれば, 空間グラフの図式に適応できるような $(*)$ に代わる関係式か, $(*)$ が使用できるように空間グラフの図式を操作することが必要となる. まずは $(*)$ が成立する 4-正則グラフの空間埋め込みに関する考察を行う. それと並行して, 3 連結平面グラフなどの比較的扱いやすいグラフの空間埋め込みに関する考察にも着手し, 論文 [9] の結果の空間グラフの図式への拡張に取り組む.

(2) (3,4)-図式を持つ結び目および絡み目の特徴付けを行う.

論文 [9] では universal sequence を定義し, universal である数列を与えた (狭義単調増加数列 $S = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ が universal であるとは, 全ての結び目と絡み目が, ある n に対し各面が a_n 辺形になっている図式を持つときをいう). (3,4,5), (2,4,5) など, 3 項の数列で universal なものは見つかっているが, $(*)$ を満たす 2 項の数列で universal であるものは見つかっていない. 一般に, 与えられた数列が universal でないことを決定することは難しく, これまでのところ $(*)$ を使用する以外の方法は見つかっていないので, universal でないことを判定する方法の確立は 1 つの課題である. また, 2 項の数列 (3,4) は $(*)$ を満たすが universal ではないと予想しているので, まずは 3 辺形と 4 辺形のみで構成される図式 ((3,4)-図式) で実現される結び目の特徴付けを行いたい. 特に, 補領域の形を反映する結び目不変量は見つかっていないので, それを見つけることも今後の課題である. また, 補領域の形に着目するということは結び目から構成したグラフとその双対グラフの頂点の次数に着目していることになるので, グラフ理論の観点からもアプローチも試みる.

(3) 同じ結び目を閉包をとして持つ互いに共役でない既約な組み紐の無限列の構成法を与える.

J. S. Birman-W. W. Menasco の 3 次の組み紐の分類定理により, $n \leq 3$ のとき, n 次の組み紐の閉包として表される絡み目 (もしくは結び目) に対し, その絡み目を閉包として持つ n 次の組み紐の共役類は高々3 つであることが知られている. それに対し, 4 次以上の組み紐群に関しては H. R. Morton と T. Fiedler が自明な結び目に対して, E. Fukunaga が $(2, p)$ トーラス絡み目に対して, それらを表す互いに共役でない 4 次の組み紐の無限列の具体例を与えている. 論文 [4][5][7] では, 結び目不変量と局所変形を利用して, このような無限列の構成に取り組み, 結び目に対して新たな無限列を構成した. 特に [5] では, 3 次以上の組み紐の閉包として表される全ての結び目は, 次数を 1 つ上げることでこのような無限列が構成できることを示した. [4][5][7] 用いた手法は, 一部の絡み目には適用できることが分かったので, 一般の絡み目に適用できるように修正をしたい. また [5][7] で構成した無限列内の組み紐は既約ではないが, 'ある条件' を満たす組み紐表示のできる結び目は, 既約な組み紐の限列を構成できるだろうと考えており, [4] では, この予想の部分解を与えることができたので引き続き, この予想の解決を目指す.