

研究計画

研究目的

幾何学的トポロジーの分野においては、代数的手法をもちいて多様体の幾何学的性質を特徴づけることは基本的かつ非常に重要な問題である。本研究では、多様体上の微分構造の多様性の解明を、代数的な不変量を用いて行うことを目的とする。

背景

5次元以上の閉位相多様体は有限個の微分構造しかもたず、特に4次元以外のユークリッド空間には唯一つの微分構造しか存在しないことが知られている。ところが、4次元ユークリッド空間には通常とは異なる微分構造が存在することがドナルドソンの定理(論文1)を用いて観察された。その後、4次元空間には実際、非可算無限個の微分構造が存在することがゴンブにより示されている。(論文2)さらに一般に全ての1点穴あき可微分閉4次元多様体には無限個の微分構造が存在することが明らかにされた。(論文3)これは4次元多様体の特殊性を顕著にするものであり、このような4次元多様体の微分構造の多様性が、いかなる多様体の幾何学的性質に起因しているのかを具体的に調べることは重要であると思われ、それが本研究の主要な研究目的である。閉4次元多様体の研究については、最近、サイバーク・ウィッテン理論を用いた研究が大きな進展を遂げている。(論文4、論文5)4次元トポロジーの分野での重要な結果のひとつは、任意のキャッソンハンドルが標準的開2-ハンドルに位相同型である、というフリードマンの結果(論文6)である。なぜなら、その結果は4次元ポアンカレ予想の解決に用いられているからである。一方でドナルドソンの定理を用いると、標準的開2-ハンドルに微分同相でないようなキャッソンハンドルの存在を示すことができる。

以上で述べた4次元多様体の微分構造に関する結果の証明においてはドナルドソン理論やサイバーク・ウィッテン理論などのゲージ理論に関連した手法が用いられている。一方で、最近、位相的場の理論を用いることにより、コバノフはジョーンズ多項式の拡張となっている代数的不変量(コバノフホモロジー)を定義した。(論文7)その後ラスムセンにより、この不変量から、リーによる研究を通して有効な結び目コボルディズム不変量(ラスムセン不変量)が構成されている。(論文8)この不変量をもちいると、これまでゲージ理論をもちいて示されてきた、多くの結果の別証明が可能となる。例えば、ラスムセンは結び目解消数に関するミルナー予想に対して組み合わせ的証明を与えている。また、4次元空間上にエキゾチックな微分構造が存在することの別証明が、フリードマンの結果(論文6)およびラスムセン不変量を用いることで証明できる。私は本研究においてこの有効な不変量であるラスムセン不変量を用いて4次元多様体の微分構造をさらに進めて行きたいと思う。研究の主要問題は具体的に次のように述べられる。

問題1．任意の非コンパクトな可微分4次元多様体は非可算個の微分構造をもつか

問題2．任意の閉可微分4次元多様体は2個以上の微分構造をもつか

これまでの研究において私はラスムセン不変量をもちいて、ある種のキャッソンハンドル上の微分構造の無限族の存在や、4次元ユークリッド空間の任意の非コンパクト部分多様体がエキゾチックな微分構造を許容することに対して、ゲージ理論を用いない別証明を与えている。(論文9)また一方で、論文11ではドナルドソンの定理を用いることで、複素射影平面の無限個の連結和の任意の非コンパクトな部分多様体がエキゾチックな微分構造を持つことを示した。

当面の目標

問題1に関しては、手術理論を通してキャッソンハンドルや普遍エキゾチック4次元空間等の4次元多様体の微分構造の構成を結び目理論を適用することで調べていき、そのような空間にエキゾチックな微分構造が存在し

うるかを調べて行きたいと思う。問題2については、同様の手法が閉多様体に適用できるかを調べることで、研究を進めたい考えている。

本研究の意義

従来ゲージ理論を用いて得られてきた結果に対して、組み合わせ的別証明を与えることはこれまで期待されてきたことであるが、代数的な結び目不変量を用いてそのような研究を行う点が本研究の特色であるといえる。実際、上で述べたようないくつかの結果を得ることができるため、研究のこの方向での有効性は確かであり、また意義があると思われる。本研究を通して私は、上で述べた問題の解決へ向けて研究を進める上で、結び目不変量と4次元多様体の微分構造との関係を注意深く調べていくことで、多様体の微分構造についてこれまで得られていなかった結果が豊富に得られることを期待している。

文献

- 論文1 . 著者名 S. K. Donaldson、論文名 **An application of gauge theory to four-dimensional topology**、掲載誌名 J. Differential Geom、18 巻、2 号、発表年 1983 年、279 項-315 項
- 論文2 . 著者名 R. Gompf、論文名 **Periodic ends and knot concordance**、掲載誌名 Topology Appl.、発表年 1989 年、32 号、141 項-148 項
- 論文3 . 著者名 R. Gompf、論文名 **An exotic menagerie**、掲載誌名 J. Differential Geom. 37 巻、発表年 1993 年、199 項-223 項
- 論文4 . 著者名 J. Park、論文名 **Simply connected symplectic 4-manifolds with $b_2+=1$ and $c_1=2$** 、掲載誌名 Invent. Math. 159 巻、発表年 2005 年、657 項-667 項
- 論文5 . 著者名 J. Park、A. Stipsicz、Z. Szab'o、論文名 **Exotic smooth structures on $CP^2 \# 5CP^2$** 、掲載誌名 Math. Res. Lett. 12 巻、発表年 2005 年、5 号-6 号、701 項-712 項
- 論文6 . 著者名 M. Freedman、論文名 **The topology of 4-dimensional manifolds**、J. Differential Geom. 17 巻、発表年 1982 年、357 項-453 項
- 論文7 . 著者名 M. Khovanov、論文名 **A categorification of the Jones polynomial**、Duke Math. J. 101 巻、発表年 2000 年、359 項-426 項
- 論文8 . 著者名 J. Rasmussen、論文名 **Khovanov homology and the slice genus**、arXiv:math.GT/0402131、Invent. Math. に掲載予定
- 論文9 . 田中利史、論文名 **Khovanov homology and exotic 4-manifolds**、投稿中
- 論文10 . 田中利史、論文名 **An infinite family of Casson handles and Rasmussen invariants of knots**、投稿中
- 論文11 . 田中利史、論文名 **Slice knots and smooth structures on noncompact 4-manifolds**、プレプリント