

研究成果

安部哲哉

研究の背景：結び目理論において最も研究されてきた結び目のクラスの一つである交代結び目は、幾何的にも代数的にも際立って良い性質をもつことが知られている。非交代結び目に関する一般論は知られていない。しかし、与えられた結び目がどれだけ交代結び目から離れているのかを表す（結び目のイソトピーに関する）不変量はいくつか存在し、これらの不変量に関して交代結び目に近い結び目は、比較的よい性質をもつことが知られている。一方で、実際にどのような結び目が交代結び目に近く、どのような結び目が交代結び目から離れているのかについての研究は非常に少なかった。

研究結果：私は、近年盛んに研究されているホバノフホモロジー理論を用いて、与えられた結び目が交代結び目からどれだけ離れているのかを表す不変量に関して様々な性質を明らかにしてきた。以下では、これらに関して私の研究結果を3つ述べる。

1 交代化数の評価

結び目の交代化数は、与えられた結び目がどれだけ交代結び目から離れているのかを測る（非負整数に値をとる）不変量の一つである。交代化数の研究における課題は、交代化数の下からの評価を与えることであった。2007年に、Kawauchi は交代化数を下からの評価を与えた。Kawauchi の手法は（結び目の補空間の基本群に由来する不変量を用いる）代数トポロジー的なものであった。この手法は、従来の結び目理論と相性がいい半面、具体的な結び目の交代化数の評価には有効ではなかった。

私は、論文 [1] において、新しい交代化数の下からの評価を与えた。この評価方法の特徴は、古典的な不変量である結び目の符号数と、ホバノフホモロジーに由来するラスムッセン不変量という、従来、結び目のスライス性の判定に用いられてきた2つの不変量を組み合わせて用いた点にある。この評価は、比較的強力であり現在のところ最も有効な評価式の一つである。

2 交代化数の決定

私は、以下の結び目の交代化数の研究を行った。

(1) トーラス結び目の交代化数

論文 [1] では、上述の評価式を用いて「ほとんど」のトーラス結び目の交代化数は2以上であることを示した。特に、交代化数が1であるトーラス結び目を完全に決定した。系として、1994年に Adams 達により提出された「概交代トーラス結び目は(3,4)と(3,5)タイプのみに限る」という予想を肯定的に解決した。

(2) 閉3-ブレイド結び目に関する交代化数

論文 [2] の岸本氏との共同研究において、上述の評価式を用いて、閉3-ブレイド結び目の交代化数は、ブレイドのフルツイストの数と「しばしば」一致することを示した。

(3) モンテシノス結び目の交代化数

論文 [2] の岸本氏¹との共同研究において，結び目の手術の理論で重要であるモンテシノス結び目の交代化数を完全に決定した．特に，非交代結び目の交代化数が 1 であることを示した．これより，モンテシノス結び目は交代化数の意味において交代結び目から非常に近いことが明らかになった．

3 トウラエフ種数について

結び目のトウラエフ種数も，与えられた結び目がどれだけ交代結び目から離れているのかを測る（非負整数に値をとる）不変量である．Champanerker-Kofman-Stoltzfus と Manturov は，独立にホバノフホモロジーに由来する不変量を用いてトウラエフ種数を下から評価した．一方で，どのような結び目が大きなトウラエフ種数を持つかはほとんど知られていなかった．

私は，論文 [3] において，交代結び目の拡張である充足結び目に対してトウラエフ種数を完全に決定した．特に，任意の自然数 n に対して，トウラエフ種数が n となる充足結び目のクラスを具体的に構成した．以上の結果は，従来理論からは得られなかった結果であり，ホバノフホモロジーの応用として非常に興味深いものである．

¹この結果に関してのみ鄭仁大を含めた 3 人の共同研究