研究成果

藤井　忍

申請者は 4 つの主曲率を持つ, 球面内の等径超曲面に興味を持っている．特に「4 つの主曲率を持つ球面内の等径超曲面は, 等質か非等質かに依らずに, 全て運動量写像と関係するだろう」と予想をしていて, その研究を行っている．

球面 S^n の超曲面が等径超曲面であるとは, S^n 上の等径関数 $\varphi : S^n \to \mathbb{R}$ のレベル集合として定義されることをいう．Münzner によって, 球面 S^n 上の等径関数 φ は Cartan–Münzner 多項式と呼ばれる斉次多項式関数 $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を S^n に制限して得られることが分かっている．

さて, 階数 2 の Hermite 対称空間 G/K の等方表現の主 K–軌道が球面 S^{2n-1} 内の等質等径超曲面となることが知られている．定義から, この軌道は適当な等径関数 $\varphi : \mathfrak{p} \simeq \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ のレベル集合である事が分かっている．ここで $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に現れる $\mathfrak{p}$ である．Münzner の結果によって, この φ は適当な Cartan–Münzner 多項式 $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{2n}]$ の S^{2n-1} への制限である事が分かっている．注目すべきは f が K–不変であることである．

一方で, 階数 2 の Hermite 対称空間 G/K の等方表現が Hamilton 作用であることが知られている．したがって, 運動量写像 $\mu : \mathfrak{p} \to \mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$ が存在する．運動量写像は K–同変写像であり, 適当な K–不変ノルム $\| \cdot \|$ との合成を考えることで K–不変関数を得る．

φ を階数 2 の Hermite 対称空間の等方表現から得られる Cartan-Münzner 多項式とするとき, $\mathfrak{k}^*$ 上の K–不変ノルムで, φ と G/K の等方表現の運動量写像 μ のノルム 2 乗が等しくなるものが存在することを示した．

今回構成した Cartan–Münzner 多項式は, 尾関–竹内 (1976) で計算されたものと本質的に同じものであるが, 計算方法が全く異なるということを注意しておく．