研究計画

服部多恵

互いに擬等長な二つの有界次数を持つグラフのロイデン p-境界は同相であることが今までの研究で分かっている．$p=2$ の場合，調和測度と呼ばれるロイデン境界上のボレル測度が定まることが知られており，互いに擬等長なグラフのロイデン境界上の調和測度は絶対連続になるかという問題を研究する．その解決の第一歩として，境界の部分集合の容量（capacity）と道の族の極値的長さ（extremal length）を比較する．容量が正であるという性質は擬等長不変であることは示されているが，互いに擬等長なグラフの容量の値が具体的に比較されているわけではない．また，極値的長さは道の族に対して定義されているが，グラフの場合，擬等長による道の像は道になるとは限らない．したがって，比較定理を考える前に極値的長さの概念を拡張する必要がある．

もう一つの研究対象であるディリクレ和有限な有界関数の空間に関するグラフのコンパクト化を考える．倉持コンパクト化も一般の p に対してまで定義されており，ロイデン p-コンパクト化から倉持 p-コンパクト化への全射写像が存在する．さらに $p=2$ の時，有効抵抗が一様に有界ならば，倉持境界とロイデン境界は一致する．倉持コンパクト化は距離付け可能であるので，グラフから距離空間としての倉持コンパクト化への p-エネルギー有限写像を考えることが出来る．指数 p が 2 のときは，ディリクレ空間の理論を使って p-エネルギー有限写像の p-倉持境界における挙動が研究されている．しかし，2 以外の一般の指数 p に対してはこのような理論はない．したがって，この状態を打開するための何か新しいアイデアを考える必要がある．

これまでの研究に関連して，以下の課題にも興味を持っている．

グラフには，その頂点上の測度に対してラプラシアンが定まる．まず，二種類の測度から定まる二つのラプラシアンに注目する．一つは，頂点の次数を各頂点の測度として定義されるラプラシアンで，これに対してはリーマン多様体の離散版としての結果，そしてランダムウォークとの関連からの結果が多くある．もう一つは点測度によって定義されるものであり，最近研究されるようになってきた．例えば，指数的体積増大度を用いてスペクトルの下限を上から評価するというブルックス型の不等式は前者のラプラシアンに対してのみ証明されている．急速に枝分かれしていく無限ツリーに対しては，前者のラプラシアンの本質的スペクトルは 1 のみで，後者のラプラシアンのスペクトルは離散的であることが示される．したがって，両者のラプラシアンに対して異なる結果が得られる．この違いに注目しながら研究する．上の定理は二種類の測度に対して定義されるラプラシアンのスペクトルの離散性を考えていたが，さらに測度を変化させたとき，スペクトルが離散的になるのはどういう測度か，また，その測度の形はグラフの幾何とどのように関わっているかということを研究したい．

調和写像の興味深いクラスとして，調和射（harmonic morphism）がある．グラフ間の調和射は浦川肇氏によって定義され，グリーン関数の比較定理とスペクトルの比較定理が証明されている．有効抵抗はグラフ特有の関数であり，測地距離とは異なるグラフ上の距離になる．私は、この距離に関して調和射は縮小写像になるかという問題の解決を目指す．