これまでの研究成果

服部多恵

私は，連結，無限グラフと完備，非コンパクト，連結リーマン多様体上の p-ディリクレ和有限な有界関数の空間とそれに関するコンパクト化，擬等長不変な性質について研究してきた．以後，グラフは連結，無限グラフを，リーマン多様体は完備，非コンパクト，連結リーマン多様体を意味することとする．

擬等長は連続である必要もなく，位相的な性質を保存する必要もないが，無限遠点に関わるいくつかの性質を保存することが知られている．例えば，体積の増大度，等周不等式，グラフ上では非自明な p-ディリクレ和有限な p-調和関数の存在が保たれる．また，グラフ上の p-ディリクレ和有限な有界関数全体は単位元を持つバナッハ代数であるので，(1) 頂点集合がその稠密な開部分集合であり，(2) 任意の p-ディリクレ和有限な関数がその上まで連続的に拡張され，(3) 境界上の任意の 2 点がその上まで拡張された関数によって分離されるようなコンパクトハウスドルフ空間が同相を除いて一意的に存在する．これをグラフのロイデン p-コンパクト化という．グラフのロイデン p-コンパクト化から，頂点集合を除いた集合をグラフのロイデン p-境界という．リーマン多様体に対しても同様な定義をする．

互いに擬等長な二つの有界次数グラフを考える．私は，その間の擬等長写像がそのグラフのロイデン p-コンパクト化上に連続的に拡張され，その関数をロイデン p-境界上へ制限すると同相写像であり，元のグラフのロイデン p-調和境界の像はターゲットスペースのロイデン p-調和境界に一致することを示した．さらに，互いに擬等長なグラフ上の p-ディリクレ和有限な p-調和関数全体のなす空間に全単射の対応を与えた．一方，bounded geometry なリーマン多様体に対しては，ネットと呼ばれるその多様体に擬等長な有界次数グラフが定義されることが知られている．これを用いて，リーマン多様体とそのネットの間の擬等長に対する上記の定理の類似を示した．この二つの定理より，互いに擬等長である bounded geometry なリーマン多様体に対しても同様な定理を得た．

上の定理では，互いに擬等長なグラフのロイデン p-境界は同相であることを述べたが，これはグラフ独特の性質を用いて証明されている．リーマン様体に対しては成り立たない．実際，リーマン多様体に対して同様な事実を証明するためには指数 p を制限しなければならないことが分かる．互いに擬等長で bounded geometry な二つのリーマン多様体の次元より指数 p が大きい時は，それらのロイデン p-境界は同相である．指数 p がリーマン多様体の次元以下の場合，リーマン多様体のロイデン p-境界の任意の一点のみからなる集合は G_δ 集合ではない．しかし，グラフの場合ロイデン p-調和境界の任意の一点からなる集合は，G_δ 集合になるときがある．この様に，指数 p を変化させることによって，性質が変化していく様子が分かるいくつかの結果を得た．

さらに，(1)3 次元双曲空間と擬等長であり，(2) 非自明なディリクレエネルギー有限な有界調和関数を持たない，そして (3)bounded geometry ではないようなリーマン多様体を構成した．この例は，上で述べた定理において bounded geometry というリーマン多様体の仮定が不可欠であることを示している．