

研究成果

蒲谷祐一

Pre-Bloch 不変量 (論文 [1]) Neumann-Yang により有限体積双曲 3 次元多様体に対して Bloch 群に値をとる Bloch 不変量が定義された。論文 [1] では Neumann-Yang により定義された Bloch 不変量を 3 次元多様体の境界の種数が 2 以上の場合に拡張した。この不変量は境界にパンツ分解を指定する事により定まり、pre-Bloch 群に値を取る。特に表現の体積を定義できる。各パンツの境界の閉曲線のホロノミーの固有値 $H_k (k = 1, \dots, 3g-3)$ とそこでの二つのパンツの表現の張り合わせの twist を測る twist parameter W_k を定義し、これらのパラメータを用いて $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現の体積の変分公式を与えた：

$$d\mathrm{Vol} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3(g-1)} (\log|W_k| d\mathrm{arg}(H_k) - \log|H_k| d\mathrm{arg}(W_k)).$$

Ideal points の計算法 (論文 [2]) 境界が 1 つのトーラスである 3 次元多様体に対し、(位相的) 理想四面体分割から character variety の ideal point を計算する方法を与えた。理想四面体分割の観点から ideal point を見つける研究として Yoshida の仕事があり、ideal point が満たすべき線型方程式を与えている。ただ Yoshida の論文で与えられているのは ideal point が満たす必要条件で、本当に ideal point であるかを判定する必要がある。私は Yoshida の方法で見つかる ideal point の候補が実際に ideal point を与えることを保証する判定条件を与えた。一方 Culler-Shalen 理論により ideal point から圧縮不可能曲面を見つかる事ができる。判定条件は計算機を用いて実行できる形のものであるので、実際にプログラムを書いて多くの結び目の補空間に適用し、圧縮不可能曲面の boundary slope を計算した。次のような例が見つかった：

- Alternating knot の boundary slope で偶数でない slope を発見した。さらに整数でないものも発見した。(Montesinos knot で alternating な結び目の boundary slope はすべて偶数である。)
- Boundary slope の集合の diameter は交点数の 2 倍で押さえられるという予想があるが、この条件を満たさない結び目の例を見つけた。

Finite surgeries on three-tangle pretzel knots (論文 [3]) Futer, Ishikawa, Mattman, Shimokawa 氏との共同研究で $(-2, p, q)$ -pretzel 結び目は $(-2, 3, 7)$ 、 $(-2, 3, 9)$ を除いて非自明な finite surgery が存在しないことを示した。主に次の 3 つの手法を用いた：

- Dehn surgery によって $(-2, p, q)$ -pretzel を生む link を考える。その link の補空間の双曲構造を決定し、さらに cusp cross section の取り方を調べることによって Agol-Lackenby による 6-theorem を適用する。
- $(-2, p, q)$ -pretzel 結び目の補空間の基本群から、ある無限群への全射を構成する。
- Culler-Shalen ノルムを評価し、Boyer-Zhang の結果を適用する。

Culler-Shalen ノルムを評価する部分では、ある $(-2, p, q)$ -pretzel 結び目の ideal point を見つける必要がある。その部分では論文 [2] の結果を用いている。

Quandle homology and knot invariants 井上歩氏との共同研究で quandle cocycle を幾何学的に構成する方法を研究した。とくに結び目の parabolic 表現に対し、quandle の coloring から決まる cycle を用いて extended Bloch group の元を構成する方法を与えた。この方法を用いると結び目の補空間の体積と Chern-Simons 不変量をダイアグラムの言葉で記述できる。また高次元の双曲体積も $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$ の放物的元のなす quandle の cocycle である事が示せた。