今後の研究計画

小畑久美

今後の研究計画の最大の目標は 2 つある．

空間グラフに含まれる結び目の評価

n 頂点完全グラフ K_n の空間埋め込み f を考える．$f(K_n)$ が含む結び目の最小交点数の最大値を $c(f(K_n))$ とする．すべての空間埋め込みについて考えたときの $c(f(K_n))$ の最小値を $\alpha(n)$ とする．Conway と Gordon は 7 頂点完全グラフのすべての空間埋め込みは非自明な結び目を含むことを証明した．いいかえると $\alpha(4) = 3$ である．1 つめの目標は n と $\alpha(n)$ の比較である．具体的には次の問題を考えている．

問 1：4 以上の整数 n に対し，$\alpha(2n-1) = \alpha(2n) = 2n-5$ が成り立つか？

問 1 はこれまでの研究成果のまとめで述べた次の結果から予想される．「$(2n-1)$ 頂点完全グラフと $2n$ 頂点完全グラフの螺線埋め込みが $(2n-5, 2)$ 型トーラス結び目を含む.」

問 1 の解決の方針として 2 通りの方法を考えている．1 つめは螺線埋め込みを手がかりに，少しずつ交差交換をしても問 1 が正しいことを証明する方法である．具体的なステップとして，まず最初に問 1 を $n = 5$ の場合に解決しようとして研究を進めている．そこでこれまでの研究成果のまとめで述べたように「9 頂点完全グラフの螺線埋め込みに対して，xy 平面に射影して現れる交点を 1 つ選んで交差交換をしても最小交点数 5 の結び目を含む」ことが分かった．7 頂点完全グラフは非自明な結び目を含むという Conway と Gordon の定理は Arf 不変量を使って証明されている．しかし，Arf 不変量では最小交点数を評価できない．そのためグラフを任意に交差交換しても変化せず，しかも最小交点数を評価できるような不変量見つけたい．解決方針の 2 つめとして線形埋め込みを一般の埋め込みに近づけることを考える．そのために考えるのがグラフの各辺が折れ線になるような埋め込みである．グラフのすべての辺を p 回折り曲げた埋め込みを p ベント埋め込みと呼ぶ．p が大きくなると一般の埋め込みに近いと考えられる．まず p が 1 のときを考える．そのとき，完全グラフの 1 ベント埋め込みは 2 部グラフの線形埋め込みとみなせる．また頂点数も分かる．この埋め込みが最小交点数が 5 以上の結び目を含むかを考え，p を順に大きくする方法をとる．

円周数による結び目表の作成

目標の 2 つめは円周型埋め込みについての結び目表を作ることである．成果で述べたが，円周数と最小交点数との間には (1) $\mathrm{Circ}(K) \leq c(K) + 2$，(2) $\mathrm{Circ}(K) \geq 2$ のとき $2\{\mathrm{Circ}(K)\}^2 - 3\mathrm{Circ}(K) \geq c(K)$ の関係がある．これより円周数を固定すると結び目は高々有限個であることがわかる．この事実より，円周数による結び目表を作ることが可能であると分かる．そのために最初に考えるべきことは，次の問題である．

問 2：「円周数が 4 である素な結び目は 8 の字結び目か？」

ここで素な結び目とは連結和で現せない結び目である．

問 2 の解決方法として以下のことを考えている．円周を平面に射影すると楕円になる．4 つの楕円の平面へのはめ込みは組み合わせ的には有限個である．4 つの楕円に含まれる射影図も高々有限個である．すなわち，円周型埋め込みで作られる結び目でそのような射影図をもつものも高々有限個である．原理的にはこの方針で問 2 は解決出来るはずである．しかし楕円の長軸と短軸の長さや比率は自由に変えられる．よって，この複雑さにより問 2 の解決には至っていない．円周数が n の場合はより多くの場合分けが必要になるので，一般には非常に難しい．しかしながら，アルゴリズムを作るなどの方法で円周数の一般的な性質にせまれるのではないかと考えている．