

今後の研究計画

黒木慎太郎

2010年度の研究所員の期間中も、昨年に引き続き Toric Topology に関係する研究を続けて行きたいと思えます。現在の研究の進展状況を踏まえると、大きく分けて以下の二つの研究をすることになると思えます。

(1) 微分幾何学と代数幾何学の対象で toric hyperKähler 多様体と呼ばれるものがあります。これは toric 多様体の hyperKähler 類似にあたるもので、四元数空間をトーラス作用での hyperKähler 商を取った物として定義することが出来ます。Toric 多様体が fan や polytope の組み合わせ構造で記述できたのと同様に toric hyperKähler 多様体は hyperplane arrangement の組み合わせ構造で記述することが出来ます。Toric hyperKähler 多様体は空間としては toric 多様体と大分異なっているのですが、二つの空間の間では非常に似たような現象が起きます。例えば、(空間が smooth な場合には) 同変コホモロジー環が対応する組み合わせ論的な対象の Stanley-Reisner 環で記述できることや、同変コホモロジー剛性が成立することなどがそのような現象に当たります。そこで、『これらに類似して見られる現象をどのように統一的に扱うか?』という問題は自然な問題の一つです。2002年に、Hausel-Sturmfels は Lawrence toric 多様体と言う概念を導入して、この問題に対して一つの答えを出しました。しかしながら (smooth な) toric hyperKähler 多様体自体はそれほど大きなクラスではないので、彼らの結果を smooth な空間の立場から見るとそれほど大きなクラスが統一されているわけではありません。また、toric 多様体にはその topological counterpart にあたる quasitoric 多様体と言うものも定義され広く研究されています。最近の研究の中で (まだ論文にはなっていませんが)、申請者は quasitoric hyperKähler 多様体と quasi Lawrence toric 多様体にあたる概念を定義しました。これらの概念は、前年度の計画に書いた toric hyperKähler 多様体 (hypertoric variety) のトポロジカルな拡張に当たるものの一つの形だと思っています (更に拡張出来る余地はありますが)。また、これらは toric hyperKähler 多様体や toric 多様体を扱えるだけでなく quasitoric 多様体も扱えるクラスになっています。そこで第一の目標は、これらの概念の基本的な部分の研究を通して、Hausel-Sturmfels の結果のトポロジカルな拡張と、toric hyperKähler 多様体と toric 多様体をトポロジカルに一般化した立場で統一することが目標になります。そして toric 多様体への応用 (特にコホモロジー剛性問題への応用) と、Preprint (6) の研究 (GKM graph を用いて上記の視点よりも大きな視点からの統一を試みた研究) との関係も探って行きたいと思えます。

(2) 第二は、同変コホモロジーから幾何的性質を作ることにに関する研究です。M.Masuada の最近の研究や Preprint (11) の研究から、同変コホモロジーは空間の幾何的な性質をある程度復元できることがわかります。これらのことから『同変コホモロジーと言う位相不変量がどの程度の幾何的な情報を復元できるか?』について考えてみたいと思えます。この種の問題は古典的ですが位相幾何学においては中心となる問題の一つなのですが、最近の Toric Topology の発展の中で同変コホモロジーに関して何らかの形で綺麗な答えを得られるのではないかと期待があります。また、前年度の計画に書いた拡張作用に関する研究と言うのも、この枠組みの中で捉えることが出来ます。最近の Masuda の研究によるとルート系を (Toric 多様体の) 同変コホモロジーの中に定義することによって、群作用の拡張の情報をある程度捉えられることがわかります。これは作用の拡張の情報もトーラス同変コホモロジーの中に現れてくるということを意味しています。F.Klein のエルランゲンプログラムの理念のように、空間の基本的な幾何学はその変換群からくるもので作用がどれだけ拡張するかを考えることは、空間の持つ本質的な変換群を探るものです。以上から拡張作用の情報をトーラス同変コホモロジーの中から取り出すことも幾何的な性質の復元に当たると考え、この研究の一環とみなし、具体的に例えば、より広いクラス (equivariantly formal GKM 多様体等) でルート系が定義できないか等を考えてみたいと思えます。