これまでの研究成果のまとめ

黒木慎太郎

現在まで多様体上の変換群を位相幾何的な視点から研究してきました. 大きく分けると以下の三つに分類できます. 書いてある番号は "List of publications and preprints" の "1.ACCEPTED PAPERS" と "2.PREPRINTS" にある番号に対応しています（以前の「研究成果のまとめ」も参照して下さい）.

1. トーリックトポロジー. Toric Topology とは群作用による軌道空間が良い構造（特に組み合わせ的に良い構造）を持つ場合に, その作用の代数的な, 組み合わせ的な, 解析的な, 幾何的な, そしてホモトピー論的な側面を研究することの総称のことです.

まずは一昨年度までに出した結果を順にまとめると, (6) では, ハイパートーラスグラフ（HTG）と言う新しい GKM グラフに類似したグラフのクラスを定義し, そのグラフの同変コホモロジー環構造を研究しました. (4),(7),(8) では, 等質トーラス多様体と余次元一の拡張作用を持つトーラス多様体を分類しました. (9) では, 現在 OCAMI に所属している S.Choi と共に (4),(7),(8) で分類したトーラス多様体（制限した場合に限りますが）の位相型を決定しました. この結果の帰結としてトーラス多様体でその軌道空間がホモトピーセルである場合のコホモロジー剛性問題（以下で述べます）に否定的な答えを与えることができます. (5) では, 3 次元スモールカバーの手術操作 ($\flat$, $\sharp^e$, $\sharp^{eve}$) が他の手術操作 ($\sharp$, $\natural$) で構成できることを示しました. (10) では, 復旦大の Z.Lü と共にスモールカバー上の射影束に関する研究をしました.

昨年度は (11), (12) で, toric hyperKähler 多様体に関する同変コホモロジー剛性とコホモロジー剛性を示しました. コホモロジー剛性とは, コホモロジーの構造（特に環構造）が幾何的な構造を決定する性質のことです. トーリック多様体の同変コホモロジー剛性に関する性質は M.Masuda によって証明されていますが, 同変でない場合のコホモロジー剛性問題は未解決です. コホモロジー剛性問題はトーリック多様体以外のクラスに対しても自然に考えることができる問題です. 例えば, その実数版であるスモールカバーやより広いクラスであるトーラス多様体については Masuda や上記 (9) の研究によって成立しないことが知られています. (11) ではトーリックの hyperKähler 類似に当たる toric hyperKähler 多様体に対して同変コホモロジーは hyperhamiltonian の構造を決定すること, (12) では一般のコホモロジー環（と次元）は微分同相型を決定することを示しました.

2. コンパクトリー群の作用の分類. (3) では, 有理コホモロジー複素二次超曲面（有理数係数コホモロジー環が $Q_{2n} \cong SO(2n+2)/SO(2n) \times SO(2)$ と同型になるような多様体）上に余次元一の作用を持って働くコンパクトリー群とその多様体の位相型の分類をしました.

上述の (4),(7),(8),(11) の研究も群作用の分類に関する研究です.

また, 出版の予定はありませんが, Proceedings の (8) で $SU(3)$ が作用する 8 次元の多様体の分類についても考察しています.

3. 非コンパクトリー群の可微分作用. (1) では, $S^{4(m+n)-1}$ 上の可微分（C^∞）な $SL(m,\mathbb{H}) \times SL(n,\mathbb{H})$ 作用を $\mathbb{R}^2$ の S^7 上への作用をベクトル場を用いて構成することにより非可算無限個の異なる C^∞ 級作用を構成しました.

(2) では, $\mathbb{C}P(2)$ を複素共役写像で割れば 4 次元球面になる Kuiper の定理を変換群論の観点から別証明を与え, それを用いて $SL(3,\mathbb{R})$ の 4 次元球面への連続な作用で制限 $SO(3)$ 作用が共役作用になるようなものを構成しました.