研究業績の説明

応募者: 恩田健介

応募者は, 与えられた C^∞ 級多様体上に代表的な (擬) リーマン構造の一つであるアインシュタイン構造, リッチソリトン構造の構成とその性質の研究を進めている.

n 次元多様体 M^n 上の擬リーマン計量 g_0, ベクトル場 X, 定数 α が

$$2\mathrm{Ric}[g_0] + L_X g_0 + \alpha g_0 = 0$$

を満たすとき, (M^n, g_0, X, α) をリッチソリトン構造といい, その時の計量 g_0 をリッチソリトンという. リッチソリトンはリッチ流方程式の微分同相とスケーリングによって変形する解である.

応募者の研究は二つのテーマで行なっている. 最初に, 第一の研究について述べる. 3 次元ハイゼンベルグ群上の左不変リーマン計量は, Lauret(2003) の結果により isometry と scaling を除いて唯一つに決まり, Baird and Danielo(2007), Lott(2007) の結果により拡大非勾配リッチソリトンであることが示されている. 3 次元ハイゼンベルグ群上の左不変ローレンツ計量は N.Rahmani and S.Rahmani(2006) によって, 3 つの計量 g_1, g_2, g_3 のどれかに isometry と scaling を除いて一致し, 計量 g_2, g_3 はそれぞれ負, 零の定曲率計量であることが示されていた. このような背景の下で, 応募者は 3 次元ハイゼンベルグ群上の左不変ローレンツ計量 g_1 がリッチソリトン方程式を満たすことを証明し, g_1 を収縮非勾配リッチソリトンとして特徴付けた. 同様に, 応募者はその他の 3 次元リー群としてユークリッド平面の等長変換群 $E(2)$ とミンコウスキー平面の等長変換群 $E(1,1)$ の二つの群を扱い, その上の左不変ローレンツ計量でリッチソリトンとして特徴付けられるものを見つけた. 特に, ユークリッド平面の等長変換群の左不変リーマン計量には平坦計量以外のリッチソリトンにならないが, 左不変ローレンツ計量には平坦でないリッチソリトンがあることを示した.

第二の研究について述べる. 余等質 1 計量がどのような条件の下でアインシュタイン計量やリッチソリトンになるかを調べる研究は, 多くの研究者によって研究されている. 応募者の研究がこれまでに行なった研究は, 3 次元リー群上が作用する余等質 1 の多様体上の計量で 3 次元リー群上の計量が (ある意味) リッチ流の軌道になっているリッチ平坦計量の構成である.

$\{\theta\}_{i=1}^{3}$ を 3 次元リー群上の 1 次微分形式とし, 3 次元リー群が作用する余等質 1 の多様体上のリーマン計量 g

$$g = dt^2 + a(t)^2(\theta^1)^2 + b(t)^2(\theta^2)^2 + c(t)^2(\theta^3)^2 \tag{1}$$

を考える. 関数 $\{a(t), b(t), c(t)\}$ の取り方によって, この計量は定曲率計量や標準的な計量の直積計量など, 様々な計量を表現する. 応募者は, ある特定のリー群に関する余等質 1 の計量の関数 $\{a(t), b(t), c(t)\}$ がリッチ流を満たすときに, リッチ平坦計量が入ること, そしてそれらのいくつかには, ハイパーケーラー構造が入ることを研究した.