酒井 洋範

これまでの研究成果

コンパクトなシンプレクティック多様体に対して，安定写像のモジュライ空間を構成することができ，モジュライ空間上での積分により，シンプレクティック不変量であるグロモフ-Witten不変量が定義される．Gromov-Witten 不変量を用いて (小) 量子コホモロジーが構成される．Gromov-Witten 理論は重要であるが，モジュライ空間の扱いが難しいことにより，理論の核である Gromov-Witten 不変量を定義から計算することは非常に難しい．

Gromov-Witten 不変量から，量子微分方程式と呼ばれる，ループパラメータを含む偏微分方程式系が定義される．量子微分方程式を定義により求めるためには，Gromov-Witten 不変量が予め計算されていなければならないが，シンプレクティックトーリック多様体やそれらの完全交叉については，量子微分方程式は Gromov-Witten 不変量の値を用いずに求まることがわかっている．したがって，量子微分方程式から Gromov-Witten 不変量を復元する理論が期待されるが，量子微分方程式を見ただけでは Gromov-Witten 不変量を復元することはできない．この問題に対して Guest は，量子微分方程式の基本解の転置行列をバーコフ分解することで Gromov-Witten 不変量が復元できると予想した．

論文 [4] において，Guest による予想が複素射影空間の Fano 超曲面について正しいことを証明し，Gromov-Witten 不変量を計算するためのアルゴリズムを与えた．具体的には,「適合した平坦接続の族」「D 加群と適合した基底の組」「適合した常微分方程式系」の 3 種類の概念を定義し，これらの間に対応がつくことを示した．この対応を元に，2 種類の適合した平坦接続の族について，適合したゲージ同値類の特別な代表元の取り方が唯一であることと，適合したゲージ同値であることの必要十分条件を与えた．これらの結果から，ゲストによる予想が複素射影空間の Fano 超曲面について正しいことが従う．

論文 [3]（M. Guest との共同研究）において，重み付き複素射影空間の量子微分方程式について考察した．多様体の量子コホモロジーを考える場合，コホモロジー環全体が 2 次のコホモロジーで生成されると仮定することが多く，この仮定は極めて重要な役割を果たす．軌道体量子コホモロジーについて同じ事を仮定することはできず，多様体の量子コホモロジーと比べてかなり複雑になっている．しかし，重み付き射影空間の場合に，量子微分方程式を「因数分解」することにより得られる「抽象量子コホモロジー」と双対 D 加群から得られる非退化双線型形式が量子コホモロジーと軌道体ポアンカレ交差形式と同一視できることを考察した．

論文 [2] において，量子 D 加群をモデルとした D 加群について，次数構造を定義し，論文 [4] で論じた手法を他変数に拡張した．これにより単調なシンプレクティックトーリック多様体を含む広いクラスの多様体の量子 D 加群について，ゲストによる予想が正しいことが示される．

論文 [1] において，重み付き複素射影空間の量子微分方程式について，論文 [3] で考察した量子微分方程式の情報のみを用いてフロベニウス多様体を構成し，これが重み付き射影空間の軌道体大量子コホモロジーと同型になることを示した．