今後の研究計画

新庄 玲子

応募者は, 空間グラフ (結び目等を含む) の図式から計算可能な代数的不変量と空間グラフ (結び目等を含む) の幾何的な性質との関連および, それを用いた分類問題に興味を持ち, 研究を行っている．今後の研究として, 次の 3 つを計画している．以下, 論文番号は論文リストに一致する．

(1) 絡み目図式の持つ性質から絡み目の性質を探る．

結び目には, 交代結び目のように図式の性質で定義された結び目があり, それらに関しては多くの性質が知られている．図式の補領域の形や数に着目することで, この交代的という図式の性質のような, 大域的な図式の性質を見出すことを目指す．

[8] では universal sequence を定義し, いくつかの universal である数列を与えた (狭義単調増加数列 $S = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ が universal であるとは, 全ての結び目と絡み目が, ある n に対し各面が a_n 辺形になっている図式を持つときをいう)．2 項の数列で universal なものがあるかはまだ分かっていないが, 数列 (3,4) は universal ではないと予想している．まずは, この予想を肯定的に解決し, 3 辺形と 4 辺形のみで構成される図式で実現される結び目 (および絡み目) の特徴付けを行うことを目指す．

そのために, 補領域の形を反映する結び目不変量を見出すことが今後の課題である．また, 補領域の形に着目するということは結び目から構成したグラフとその双対グラフの頂点の次数に着目していることになるので, 結び目理論の観点のみからではなく, グラフ理論の観点からもアプローチしたい．

(2) 空間グラフの図式の補領域に関する考察．

2 次元球面 $\mathbb{S}^2$ 上の結び目または絡み目図式は, 上下の情報を忘れることで, $\mathbb{S}^2$ 上の 4-正則グラフとみなすことができ, このグラフは $\mathbb{S}^2$ をいくつかの面に分割する．この面を図式の補領域とよび, プレプリント [8] では, その形 (何辺形であるか) と, 奇数辺形の個数に着目して図式の組み合わせ的な性質を探った．[8] で与えた絡み目図式の奇数辺形の数に関する結果は, 自然に平面グラフの空間埋め込みの図式へと拡張できることが分かっているので, (1) と同様に, 空間グラフの図式から空間グラフの大域的な性質を見出すことを目標に, 非平面グラフの空間埋め込みに関しても考察し, 一般のグラフの埋め込みにまで拡張したい．

(3) 同じ結び目を閉包をとして持つ互いに共役でない既約な組み紐の無限列の構成．

J. S. Birman-W. W. Menasco の 3 次の組み紐の分類定理により, $n \leq 3$ のとき, n 次の組み紐の閉包として表される絡み目 (もしくは結び目) に対し, その絡み目を閉包として持つ n 次の組み紐の共役類は高々3 つであることが知られている．それに対し, 4 次以上の組み紐群に関しては H. R. Morton と T. Fiedler が自明な結び目に対して, E. Fukunaga が $(2, p)$ トーラス絡み目に対して, それらを表す互いに共役でない 4 次の組み紐の無限列の具体例を与えている．論文 [1][2][6] では, 結び目不変量と局所変形を利用して, このような無限列の構成に取り組み, 結び目に対して新たな無限列を構成した．またこの結果は一部の絡み目に関して, A. Stoimenow によって拡張されている．‘ある条件’ を満たす組み紐表示のできる結び目 (または絡み目) は, このような無限列を構成できると予想しており, 現在は A. Stoimenow と, この予想の解決に取り組んでいる．引き続き, この予想の解決を目指す．