これまでの研究成果のまとめ

辻井 健修

ジョルダン標準形の理論より、代数閉体 $\Bbbk$ 上の一般線形群 $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ のリー環 $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ のベキ零軌道は、n の分割により分類されることは有名である。1976 年、Bala と Carter は $\mathfrak{sl}_2$ 理論を用いて、代数閉体 $\Bbbk$ の標数が 0、または、十分大きければ、$\Bbbk$ 上の連結簡約代数群 G のリー環 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ のベキ零軌道から、G のレビ部分群 L とそのすぐれた放物型部分群 P_L の組 (L, P_L) の共役類への全単射が存在するすることを証明した。このベキ零軌道の分類定理は、今日、Bala-Carter の定理と言われ、よく知られている。その後、良い標数と言われるほぼ全ての標数に対して、この定理が成立することが Pommerening により示された。この事実は、代数群の表現論における基本的な結果で、特に、良い標数におけるベキ零軌道の理論において重要である。たとえば、ベキ零元に関連した余指標の存在、良い横断的切断の存在、また、ベキ零元を含むボレル部分代数の為す多様体とベキ零軌道の次元に関する定理などは、Pommerening の結果を用いて証明された。ところが、Pommerening による証明は、単純ルート系に応じて具体的な計算を必要とする大変な証明であった。しかも、一部の証明の詳細が省かれている。そこで、統一的な証明が待望されていたが、長らく解決されていなかった。

Pommerening の証明から 20 年以上が経過した 2003 年、Premet により具体的計算を必要としない証明がようやく与えられた。Premet は、Kempf-Rousseau 理論と、標数 0 の場合の余指標を持ち込む巧みな手法によって、Pommerening の定理の証明を与えたのみならず、ベキ零元に関連した余指標の存在、良い横断的切断の存在を同時に示すことに成功した。

しかし、Bala-Carter の定理 (標数 0、または十分大きい場合) と比べればかなり難しい証明となっている。不変式論、有限体上の簡約代数群の理論を使い、更に Bala-Carter の定理も利用しなければならない、つまり、標数 0、または十分大きい場合の証明を必要とする。そこで、より簡潔な証明を与えることができないか、研究を行った。Kempf-Rousseau 理論を用いての証明を考慮した結果、最も合理的な方法は、“すぐれた” ベキ零元に対して、Kempf-Rousseau 理論における最適な放物型部分群が、“すぐれた” 放物型部分群であることと、最適な放物型部分群の Richardson 元が与えられたベキ零元を含むことを直接示すことである。ところが、重大な問題が 2 つ生じる。

- ベキ零元 X に対してある自然数 $m(X)$ が決まるが、最適な余指標の内、X が $m(X)$-ウェイト部分に入る余指標が存在するかどうか。
- すぐれたベキ零元 X に対して、$m(X)$ が 2 以下であるかどうか。

Premet の証明より共に正しい事実であるが、これらを直接示すことができるかどうかが問題となった。研究の結果、簡潔に証明する方法を見いだし、更に、Premet の証明同様、ベキ零元に関連した余指標の存在、良い横断的切断の存在を同時に示すことに成功した。簡潔となった主な点は以下の通りである。

- Bala-Carter の定理を用いなくてよい、すなわち、全ての良い標数に対して Bala-Carter の定理の主張がまとめて証明できる。
- 有限体上の簡約代数群の理論を必要としない。
- “すぐれた” ベキ零元のみを考えればよいので、一部の証明がより簡略化されている。