研究計画

和田出 秀光

E-Mail：wadade@sci.osaka-cu.ac.jp　or　hidemitsuwadade@gmail.com

N.Ghoussoub-F.Robert [$**$] らは, 重みを伴う斉次 Sobolev 不等式, Hardy-Sobolev の不等式に対し, 原点が領域の境界に存在し, かつ原点における平均曲率が負の場合において, 最良定数を達成する極値関数の存在を証明した．このことは, 対応する Euler-Lagrange 方程式を考慮し, 次の楕円型方程式の正値解の存在を保証する：

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{u^{2^*-1}}{|x|^s} = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここに, $n \geq 3$, $0 < s < 2$, $2^* = \frac{2(n-s)}{n-2}$ 及び Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域とする．彼らの結果を踏まえ, 我々は 2 種の臨界項を含む次の楕円型方程式の正値解を構成した (論文 [5, 8])：

$$\begin{cases} \Delta u + \mu\frac{u^{2^*-1}}{|x|^s} + u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

ここに, $n \geq 3$, $0 < s < 2$, $2^* = \frac{2(n-s)}{n-2}$ 及び Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域, $0 \in \partial\Omega$ とし, 原点における平均曲率は負とする．[8] では方程式に対応する Hardy-Sobolev 型不等式を考察し, その極値関数として可解性を示したが, この場合, 正定数 μ は同不等式の最良定数から決定される“ ある μ ”であるのに対し, [5] では方程式 (2) に対応する変分量を考え, Palais-Smale 条件なしの峠の補題と共に, 原点での平均曲率が負であることを用いて“ 任意の μ ”に対して正値解を構成した．これらの事実を踏まえ, 私が考える今後の研究計画を述べる．

(i) これまで方程式 (1) 及び (2) の可解性を Dirichlet 条件下で考察したが, 同様の問題を Neumann 条件を付して考えたい．即ち, 例えば (1) に対応して次の方程式を調査する：

$$\begin{cases} \Delta u - u + \frac{u^{2^*-1}}{|x|^s} = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

方程式 (3) の可解性を不等式の最良定数に対する最小化関数を捉えることで証明する立場を取れば, この場合, 必然的に次の変分量を考察する必要がある：

$$\inf\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |u|^2 dx \;\middle|\; u \in H^1(\Omega) \text{ 及び } \int_\Omega \frac{|u|^{2^*}}{|x|^s} dx = 1 \right\}.$$

ここに, 扱う Sobolev 空間は境界条件無しの $H^1(\Omega)$ であり, それは Neumann 条件に対応する．

(ii) 2 つ目の研究課題としては, 方程式 (1) 及び (2) において Dirichlet 条件下, もう 1 つの臨界値 $s = 2$ の場合に同様の問題を考えたい．同問題に挑戦する際, $s < 2$ のときと異なり, 状況を困難にする点の 1 つは解の正則性にあると言える．そのことを以下概説する．下記の参考文献, K.S.Chou-C.W.Chu [$*$] 及び N.Ghoussoub-F.Robert [$**$] において, $s < 2$ の場合, Moser 型 Iteration-Method を基に方程式 (1) 及び (2) の解は $u \in L^\infty(\Omega)$ となることが示された．一旦これが証明されれば, 古典的楕円型評価及び Sobolev 定理から $u \in C^1(\overline{\Omega})$ が導かれる．一方, 臨界ケース $s = 2$ においても彼らの手法は有効であり, 関数の有界性が示されるが, この場合, 対応する重み $\frac{1}{|x|^2}$ の特異性より, $s < 2$ と同様に解の原点での連続性 (及び微分可能性) を得ることができない．この点が $s < 2$ 及び $s = 2$ の決定的な相違点と私は考える．したがって, $s = 2$ の場合には, 如何にして解の原点での挙動を探るかが今後の研究課題と言える．

• 当該分野に関連する重要文献

[$*$] K.S.Chou, C.W.Chu, *On the best constant for a weighted Sobolev-Hardy inequality*, J. London Math. Soc. (2) **48** 137–151 (1993).

[$**$] N.Ghoussoub, F.Robert, *The effect of curvature on the best constant in the Hardy-Sobolev inequalities*, Geom. Funct. Anal. **16** 1201-1245 (2006).