研究成果

和田出 秀光

E-Mail : wadade@sci.osaka-cu.ac.jp or hidemitsuwadade@gmail.com

私のこれまでの研究テーマを主に 2 つに分類し要約したい.

(i) 1 つは, 解析学上において必須の **Sobolev 型不等式**を種々の観点からより精密に調査することである. この方向での研究の推進は, 関数空間上の包含関係等を含む実解析的研究の発展と共に, その応用として非線形偏微分方程式の解析において非常に有用であると確信する. 特に私は, 次の早稲田大学 小澤徹先生 [∗∗] により示された Sobolev 空間と Lebesgue 空間の包含関係を示す **Gagliardo-Nirenberg 型補間不等式**に着目し, 同不等式の最良定数等を研究した :

$$\|u\|_{L^q} \le C\, q^{1-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \|(-\Delta)^{\frac{n}{2p}} u\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}. \tag{1}$$

ここに $n \in \mathbb{N}$, $1 < p \le q < \infty$, C は n, p のみに依存する正定数である. 不等式 (1) は関数空間として有界関数の族 L^∞ の枠に属さないという意味での**臨界**に位置する臨界 Sobolev 空間 $H^{\frac{n}{p},p}$ 上の不等式であり, $q \to \infty$ における右辺の正定数の発散指数は最適であることが分かる. 私は**論文 [1]** において, 不等式 (1) の右辺の正定数 C に関する最良定数を考察し, その下からの評価を得た. 特に, $p = 2$ の場合, 即ち臨界 Sobolev 空間が Hilbert 空間となる場合において, この下からの評価は最適であり, 具体的に最良定数を求めることができる.

また異なる研究方向として, 不等式 (1) を通常の Sobolev 空間のみならず, 他の実解析的に定義される関数空間において統一的に導出することが挙げられる. 具体的に**論文 [2]** では, 臨界 Sobolev 空間 $H^{\frac{n}{p},p}$ において $p = \infty$ に相当する関数空間, 所謂 **BMO(Bounded Mean Oscillation)** に対する Gagliardo-Nirenberg 型不等式を証明した. この系として, BMO に属する関数の分布関数が遠方で指数減衰することを保証する **John-Nirenberg の不等式**が導出される. 更に, **論文 [3, 10]** では, 通常の Sobolev 空間を Littlewood-Paley 関数を基とし実補間を用いて一般化した関数空間である **Triebel-Lizorkin 空間**または **Besov 空間**上で不等式 (1) を再構築することに成功した. 同不等式は, 関数空間上の包含関係を考慮すると不等式 (1) を含むものであることが容易に確認される. また**論文 [4, 11]** では, 不等式 (1) を重み付き Lebesgue 空間への不等式へと一般化することにより, 臨界 Sobolev 空間に属する関数空間の最適な局所的特異性を精査した.

(ii) 2 つめの研究テーマは, **(i)** で述べた関数不等式の構築に伴い, その非線型偏微分方程式への応用にある. 特に私は, **Sobolev-Hardy の不等式**の最良定数に対する最小化問題を介して Sobolev-Hardy 型臨界項を含む**非線形楕円型方程式の可解性**を研究した. 通常の Sobolev の不等式の場合は, 全空間でなければ決してその極値関数は存在しないことが知られているが, 一方で斉次重みを伴う Sobolev-Hardy の不等式に対する極値関数の存在または非存在は, 考察する領域の形状に依って決定されることが近年, N.Ghoussoub-F.Robert [∗] によって明らかにされている. 彼らの証明は大変精緻なものであり, 特に楕円型方程式の解の爆発解析や Pohozaev 型等式を巧みに利用しているが, 我々は**論文 [5, 8]** において, 同種の非線形楕円型方程式の可解性を考察し, Brézis-Nirenberg の手法と爆発解析を組み合わせ, 比較的簡単な証明を与える. 実際, 適当な条件下, 次の 2 種の Sobolev 臨界指数を含む楕円型方程式の正値解を構成する :

$$\begin{cases} \Delta u + \mu\, u^{\frac{2n}{n-2}-1} + \frac{u^{2^*(s)-1}}{|x|^s} = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad 2^*(s) := \frac{2(n-s)}{n-2}. \end{cases} \tag{2}$$

ここに, $n \ge 3$, $0 < s < 2$, μ はある正定数, Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域, $0 \in \partial\Omega$, 更に **0 における $\partial\Omega$ の平均曲率は負**とする. 領域の平均曲率に対する条件は方程式 (2) が正値解を持つための 1 つの十分条件であるが, 必要条件であるかどうかは定かではない. しかしながら, かなり本質的なものであると推測される. 実際, 領域が $0 \in \partial\Omega$ に関して星型領域である (この場合, 0 における平均曲率は非負) と仮定すると, Pohozaev 型等式を介して方程式 (2) は正値解を持ち得ないことが容易に確認される.

上記の研究テーマ **(i)** においては, 関数不等式の調査を種々の観点から研究し, **(ii)** においては関数不等式, 特に Sobolev-Hardy 型不等式に関連した楕円型方程式の可解性を研究した. 前者では主に実解析的手法, 後者は関数解析及び楕円型理論を主な数学解析の研究手段とする. 2 つのテーマの両者は, 互いに関連性はあるもののこれまで独立に研究してきたという印象が自身の中で強い. 今後はこれらを総合的に研究し, より大きな数学的枠組みで研究に従事できればと考える.

- **当該分野に関連する重要文献**

[∗] N.Ghoussoub, F.Robert, *The effect of curvature on the best constant in the Hardy-Sobolev inequalities*, Geom. Funct. Anal. **16**, 1201-1245 (2006).

[∗∗] T.Ozawa, *On critical cases of Sobolev's inequalities*, J. Funct. Anal. **127**, 259-269 (1995).