平成 23 年 2 月 6 日作成

今後の研究計画 （坊向 伸隆）

今取組んでいる研究対象は (A) 調和写像および (B) 擬リーマン対称空間内の鏡映部分多様体である．

(A) 調和写像について

(1) N. Boumuki and J. Dorfmeister, On a relation between potentials for pluriharmonic maps and para-pluriharmonic maps, arXiv:math/1012.0358.

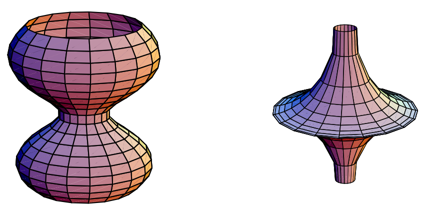
二階偏微分方程式 $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+(\text{lower order terms})=0$ は $B^2-4AC<0$ (resp. $B^2-4AC>0$) を満たすとき**楕円型** (resp. **双曲型**) と呼ばれる．ここで u, A, B, C は 2 変数 x, y の実関数を表す．

申請者は 楕円型偏微分方程式と双曲型偏微分方程式の関係, とりわけ, 双曲的サイン - ゴルドン方程式とサイン - ゴルドン方程式の関係に興味を持っている:

(i) $$u_{z\bar{z}}+\sinh u=0 \quad \longleftrightarrow \quad u_{xy}-\sin u=0.$$

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の平均曲率一定曲面 (以下 CMC 曲面と略す) は 双曲的サイン - ゴルドン方程式と密接に関係し, $\mathbb{R}^3$ 内の負のガウス曲率一定曲面 (以下 K 曲面と略す) は サイン - ゴルドン方程式と密接に関係している．これらは, CMC 曲面と K 曲面の関係についての研究が 関係 (i) についての研究と密接に関係していることを意味している．

(ii) $$\text{CMC 曲面 in } \mathbb{R}^3 \quad \longleftrightarrow \quad \text{K 曲面 in } \mathbb{R}^3.$$

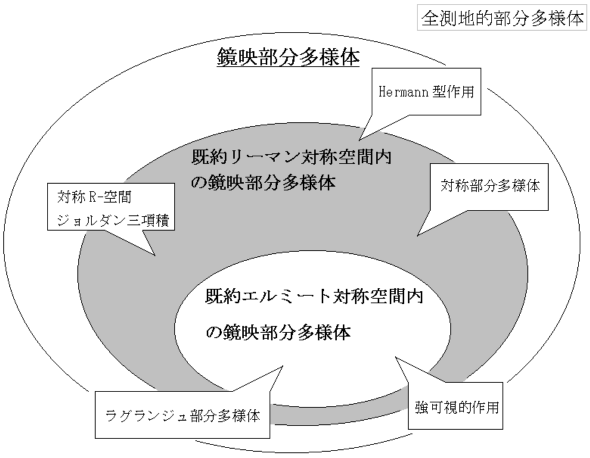


CMC 曲面 M in $\mathbb{R}^3$ に対し そのガウス写像 $\nu : M \to S^2$ は調和になり, K 曲面 $\bar{M}$ in $\mathbb{R}^3$ に対し そのガウス写像 $\bar{\nu} : \bar{M} \to S^2$ は (ローレンツ) 調和になることが知られている．このことから, ループ群論という観点で ν と $\bar{\nu}$ を統一的に取扱うことができると思われる (cf. (1)). ν と $\bar{\nu}$ を統一的に取扱えれば 関係 (ii) を解明でき, それにより 関係 (i) を解明できるのではないか？ と想像している．つまり, ループ群論により 関係 (i) を解明できるのでは？ と考えている．

今後の目標: ループ群論の視点から 関係 (i) について調査・研究を進める.

(B) 擬リーマン対称空間内の鏡映部分多様体について

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の平面 $\mathbb{R}^2$ や, 2 次元球面 S^2 内の大円 S^1 などは リーマン対称空間内の鏡映部分多様体である. ここで 鏡映部分多様体とは次で定義された概念である (cf. Dominic S. P. Leung, J.Differential Geom., 1973)：(M, g) を連結リーマン多様体とし, σ を (M, g) の回帰的な等長自己同型写像とする. この時, $M^\sigma := \{p \in M \mid \sigma(p) = p\}$ の連結成分で空でないものを (M, g) 内の**鏡映部分多様体**と呼ぶ.[1] 鏡映部分多様体 L は, 全測地的部分多様体となり 部分多様体の研究において重要な概念といえる. また, 全空間 (M, g) が既約リーマン対称空間である場合には, L は対称部分多様体にもなり 塚田-内藤の研究と関連をもつ (cf. 塚田和美-内藤博夫, 数学 第 55 巻, 2003). さらに 既約リーマン対称空間 (M, g) がエルミートである場合には, L は実形とも関連し そこから強可視的作用の研究と結び付く (cf. Toshiyuki Kobayashi, RIMS, 2005). そして L が実形である際には 横断的に交わるラグランジュ部分多様体の組が存在し, M がコンパクトならば フレア・コホモロジーとの関連がうかがえる.



全空間をリーマン対称空間から擬リーマン対称空間へ拡張し その鏡映部分多様体を考える. 研究対象をリーマン計量から擬リーマン計量へ一般化することは自然である. “2 次元球面 S^2 上には, S^2 のオイラー数が 2 であることから, 符号数 $(1, 1)$ の擬リーマン計量は存在しない.” この事実が示唆するように 擬リーマン計量の研究は リーマン計量のそれを単に一般化したものとは言い切れない. それ故, 擬リーマン計量は研究的魅力に満ちている. 今後の研究目標は, 既約擬リーマン対称空間内の鏡映部分多様体をすべて決定すること, また, そこから 既約擬エルミート対称空間内の (その全空間に対する) 半分次元をもつ全実・全測地的部分多様体を決定し, 竹内の結果 (cf. Masaru

[1] $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ に通常計量 $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ を定義し, $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ の回帰的な等長自己同型写像 σ を $\sigma(x, y, z) := (x, y, -z)$ for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ で定義すれば, $\mathbb{R}^3$ 内の鏡映部分多様体 $\mathbb{R}^2$ が得られる. そして, S^2 に $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ からの誘導計量を定義し $\sigma|_{S^2}$ を考慮すると, S^2 内の鏡映部分多様体 S^1 が得られる.

Takeuchi, Tohoku Math.J., 1984) の一般化を与えることである. 更には, コンパクト既約エルミート対称空間上のドルボー・コホモロジーとフレア・コホモロジーの対応関係についても調査を進める.

以上