

研究成果

藤井 忍

申請者は4つの主曲率を持つ、球面内の等径超曲面に興味を持っている。特に「4つの主曲率を持つ球面内の等径超曲面は、等質か非等質かに依らずに、全て運動量写像と関係するだろう」と予想をしていて、その研究を行っている。

球面 S^n の超曲面が等径超曲面であるとは、 S^n 上の等径関数 $\varphi : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ のレベル集合として定義されることをいう。Münzner によって、球面 S^n 上の等径関数 φ は Cartan-Münzner 多項式と呼ばれる斉次多項式関数 $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ を S^n に制限して得られることが分かっている。

さて、階数2の Hermite 対称空間 G/K の等方表現の主 K -軌道が球面 S^{2n-1} 内の等質等径超曲面となることが知られている。定義から、この軌道は適当な等径関数 $\varphi : \mathfrak{p} \simeq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ のレベル集合である事が分かっている。ここで \mathfrak{p} は \mathfrak{g} の Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に現れる \mathfrak{p} である。Münzner の結果によって、この φ は適当な Cartan-Münzner 多項式 $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{2n}]$ の S^{2n-1} への制限である事が分かっている。注目すべきは f が K -不変であることである。一方で、階数2の Hermite 対称空間 G/K の等方表現が Hamilton 作用であることが知られている。したがって、運動量写像 $\mu : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$ が存在する。運動量写像は K -同変写像であり、適当な K -不変ノルム $\|\cdot\|$ との合成を考えることで K -不変関数を得る。

論文 [1] では、 G/K が階数2のコンパクトで既約な古典型 Hermite 対称空間の場合に、 \mathfrak{k}^* 上の K -不変ノルムで、 φ と G/K の等方表現の運動量写像 μ のノルム2乗が G/K の等方表現から得られる Cartan-Münzner 多項式 φ に等しくなるものが存在することを示した。今回構成した Cartan-Münzner 多項式は、尾関-竹内 (1976) で計算されたものと本質的に同じものであるが、計算方法が全く異なるということに注意しておく。

また、田丸博士氏 (広島大) との共同研究の結果、 G/K が階数2のコンパクトで既約な Hermite 対称空間の場合にも同様の結果を得ている。この結果は現在、論文にまとめているところである。この結果は古典型・例外型問わずノルムを求めており、古典型の場合の結果を含むものであることに注意しておく。