研究計画

Giacomo De Leva

距離空間上の Ricci 曲率

距離空間上の Ricci 曲率を定義する試みでは、最初の重要なステップは、Bacri と Émery はリマン多様体上の拡散過程の Ricci 曲率を定義し、[2] で、通常のブラウン運動の Ricci 曲率が通常の Ricci 曲率である事は証明される。このアプローチは Sturm と Lott と Villani と太田に一般化された。独立に、[7] と [4] で Sturm-Lott-Villani はいわゆる Curvature Dimension 条件を定義し、 [6] で太田はいわゆる Measure Contraction Property を定義した。また、Ollivier は、[5] で別のアプローチに続いて、距離空間上の Markov 連鎖の Ricci 曲率の定義を与えた。（断面）曲率が下に有界な Alexandrov 空間を考慮すると、桑江と塩谷が [3] で Bishop-Gromov 型の体積の比較条件を定義した。この定義は Measure Contraction Property に同値で Curvature Dimension 条件より弱い。Bishop-Gromov 型の体積の比較条件を満たす Alexandrov 空間が Curvature Dimension 条件を満たすかどうか調べてみたい。また、桑江-塩谷の定義と Ollivier の定義の間の関係について調べる試みがないので、それについても研究してみたい。

管状のドメイン上の拡散過程

多くの物理現象は、いくつかの方向に非常に小さな寸法を持つ構造で行われる（細管での流体の動きや波ガイドでの電磁波の伝搬等）。このような構造は、拡散過程を持つ測度距離空間による数学的な観点から説明する事ができる。これらの距離空間は Gromov-Hausdorff トポロジーでグラフに収束する。グラフ上の拡散過程の研究ははるかに簡単で、物理現象を研究する最初のモデルと見なす事ができる。したがって、管状のドメインがグラフに収束すると、管状のドメイン上の拡散過程が制限空間上の過程に収束する十分条件について考えれば良い。Neumann 境界条件の場合には、この問題はよく研究されているし、これについて豊富な文献がある。Dirichlet 境界条件の場合はもっと難しく、まだあまり理解されていない。最近、[1] で Albeverio-楠岡がグラフ上の制限に収束する薄管上の拡散過程についての結果を報告した。この拡散過程は確率微分方程式から誘導される。Dirichlet 形式から誘導される拡散過程で、どうなるか調べてみたい。

参考文献

[1] A. Albeverio and S. Kusuoka, *Diffusion Processes in thin tubes and their limits on graphs*, preprint.

[2] D. Bakry and M. Émery, *Diffusions hypercontractives*, Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84. Lecture Notes in Math. **1123**, Springer, Berlin (1985), 177–206.

[3] K. Kuwae and T. Shioya, *Infinitesimal Bishop-Gromov condition for Alexandrov spaces*. Probabilistic approach to geometry, 293–302, Adv. Stud. Pure Math., **57**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

[4] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 3, 903–991.

[5] Y. Ollivier, *Ricci curvature of Markov chains on metric spaces*, J. Funct. Anal. **256** (2009), no. 3, 810–864

[6] S. Ohta, *On the measure contraction property of metric measure spaces*, Comment. Math. Helv. **82** (2007), 805–828.

[7] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces*, Acta Math. **196** (1) (2006) 65–177.