

## 今後の研究計画

黒木慎太郎

将来はこれまでに行った研究を発展させた研究、または関連した研究に取り組む予定です。

**トーリック多様体と toric HK 多様体をトポロジーの視点で統一する.** Toric HK 多様体は空間としてはトーリック多様体と大きく異なっているのですが、二つの空間の間では非常に似たような現象が起きます. 例えば、同変コホモロジーが対応する組み合わせ論的な対象の Stanley-Reisner 環で記述できることや、同変コホモロジー的剛性定理が成立することなどがそのような現象と言えます. 現在は、(15)で『トーリック多様体と toric HK 多様体上で起きる類似した現象を統一する』と言う動機の下で、toric HK 多様体のトポロジカルな拡張に当たるクラスを定義しそれを研究しています. 現在まで、(14)の結果を用いて同変コホモロジー環を出すことができました ((31)も参照). この研究は(14)で定義した組み合わせ論的な対象(ハイパートラスグラフ)の幾何的な対応物に関する研究と考えることが出来ます. 今後は、より幾何的な性質を研究して、最終的にトラス多様体の四元数化に当たるものを定義して研究することが目標です.

**GKM 多様体上の拡張作用の研究.** Wiemeler の結果によると、一般のトラス多様体の拡張作用として、(6), (9)で出てきたような SU, SO 型(つまり root 系として  $A_\ell, B_\ell, D_\ell$  型を持つもの)のみが現れることが分かります. そこで、『他の型が出てくる多様体のクラスは何か?』と言う問題が自然に生じます. そのようなクラスとして期待されているのが GKM 多様体です. GKM 多様体には同一階数の等質空間  $G/H$  が全て含まれます. よって  $A_\ell \sim G_2$  型全ての root 系が拡張作用として出てくると期待されます. 現在は、(16)において、GKM 多様体の拡張作用を研究しています ((19)も参照). 現在までに研究成果にも書いたように  $A$  型の root 系に当たるようなものを GKM グラフ上に定義しました. 今後はこの研究を推し進めて、GKM グラフ上に  $A \sim G$  の全ての型の root 系を定義し、それを用いて GKM 多様体上の拡張作用を研究に応用したり、GKM グラフの組み合わせ論的な特徴付けを行うことが今後の目標になります.

**$\mathbb{C}P$ -tower の GKM 理論を通じた研究.** 良く知られているように  $\mathbb{C}P^{n_1}$  上の複素  $(n_2 + 1)$ -次元ベクトル束を射影化すると  $\mathbb{C}P^{n_1}$  上の  $\mathbb{C}P^{n_2}$  束ができます. 更にこの上の複素  $(n_3 + 1)$ -次元ベクトル束を射影化すると『 $\mathbb{C}P^{n_1}$  上の  $\mathbb{C}P^{n_2}$  束上の  $\mathbb{C}P^{n_3}$  束』ができます. このように射影化を繰り返していったものを  $\mathbb{C}P$ -tower と呼びます. 各複素ベクトル束が直線束に分解する場合、 $\mathbb{C}P$ -tower は generalized Bott tower と呼ばれトーリック多様体の構造が入ることが知られています. 一般のベクトル束の場合はトーリック多様体の構造が入るとは限りませんが、しばしば GKM 多様体になることがあります. 現在は、(17)において Suh と共に  $\mathbb{C}P$ -tower の性質について研究しています. 現段階では(研究成果でも述べたように)、6次元以下の場合の(同変)コホモロジー的剛性定理を証明することができました. 今後はより一般の場合について研究していく予定です. また、 $\mathbb{C}P$ -tower には  $A$  型の旗多様体等が含まれるので、『独立に発展してきた Bott tower や  $A$  型の旗多様体を結びつける研究になる』ことが、今後の展開として期待されます. また、未だに解かれていない、Bott tower そのもののコホモロジー的剛性問題も挑戦してみたいと思っています.

**GKM グラフを通じた他分野との関係.** GKM グラフは、申請者の研究しているトポロジー以外の分野でも、最近になってさまざまな分野(代数幾何、表現論や数理物理等)でも使われ始めているようです. 他にもまだまだ(例えば組み合わせ論等でも)、使える余地があると感じています. 研究所員の間は他分野の研究者とも積極的に交流して、特に GKM グラフを通して他分野との関係が出てこないか考えてみたいと思います.