これまでの研究成果のまとめ

黒木慎太郎

ここでは、今後の研究計画に関係する結果に絞って述べます.（2010 年度の研究成果も参考にしてください）以下の番号は “List of achievements” の番号に対応しています.

トーラス作用の非可換な群作用への拡張に関連する研究. トーラス多様体とは $2n$ 次元の多様体で n 次元のトーラス T^n が不動点を持って作用するようなものの事を言います.

(6), (9) では T^n 作用の拡張作用について調べました. (6) では拡張作用が推移的になるような場合を分類し、そのような場合は複素射影空間 $\mathbb{C}P$ の直積になることを示しました. (9) では余次元一の軌道を持つ場合を分類し、この場合は $\mathbb{C}P$ の直積上の $\mathbb{C}P$ 束になることが分かりました.

コホモロジー剛性問題に関連する研究. コホモロジー剛性問題とは、コホモロジー環の同型が多様体の同相を導くかを問う問題の事です. もちろん多様体全体で考えればこのような事は起きませんが、トーリック多様体に多様体のクラスを制限するとこの問題は未解決です. この問題をトーリック多様体以外のさまざまなクラスに関して研究しました.

(10) で、Choi と共に (6), (9) で分類したトーラス多様体の（あるクラス $\mathcal{M}$ の）位相型をコホモロジー環と実特性類を用いて精密な分類を与えました. 結果の帰結として、$\mathcal{M}$ の中でコホモロジー剛性が成立する場合はいつかが分かりました. 同時に Masuda-Suh が提出していたトーラス多様体上のコホモロジー剛性問題に否定的な解を与えることができました.

Toric hyperKähler 多様体（toric HK 多様体）とは、トーリック多様体のハイパーケーラー類似に当たるものです. (11) では、同変コホモロジーの構造がその hyperhamiltonian な構造を決める事を示しました（同変コホモロジー剛性定理と呼べるものです）. (12) では、次元を固定した toric HK 多様体の集合上でコホモロジー剛性定理が成立することを示しました.

現在、KAIST の Suh と共に、$\mathbb{C}P$ バンドルを繰り返していった $\mathbb{C}P$-tower という空間の構造について研究しています（詳しくは「今後の研究計画」を参照）. 最初の研究として (17) で、6 次元の $\mathbb{C}P$-tower の場合の (同変) コホモロジー剛性を示しました.

GKM グラフとグラフ同変コホモロジー環に関する研究. GKM 多様体とは、T^ℓ-多様体 $M^{2m} (m \geq \ell)$ で、その 1 次元以下の軌道空間がグラフの構造を持つものとして定義されます. 例えば、上に述べた多様体は全て GKM 多様体となり、非常に広大なクラスを成しています. GKM 多様体の 1 次元以下の軌道空間として出てくるグラフに tangential representation の情報を付けたものを GKM グラフと呼びます.

(14) で、toric HK 多様体から出てくる GKM グラフを抽象化し (ハイパートーラスグラフと呼んでいます) その上に定義されるグラフ同変コホモロジー環と言う不変量の環構造を決定しました. この結果から、toric HK 多様体よりも広いクラスの（(15) で定義した toric HK 多様体を位相的に拡張したようなクラスの）多様体の同変コホモロジー環を得ることができます.

(16) で、GKM 多様体が $SU(n)$ への拡張作用を持つような場合（でさらに特殊なもの）の GKM グラフが、組み合わせ論的にどのように特徴付けることができるかを調べました（(30) も参照）. 具体的には、A 型のルート系とでも呼べるようなクラスが同変コホモロジーの中に存在する時に、その GKM グラフは完全グラフへの射影を持つか、そうでない場合は blow-up に似た操作をすることで完全グラフへの射影を持つような GKM グラフにすることができる事が分かりました. これらはそれぞれ多様体が primitive でない場合（$SU(n) \times_H N$ の形で書ける場合）と primitive な場合の組み合わせ論的な対応物であることが分かります.

(17) で $\mathbb{C}P$-tower が GKM になる場合の GKM グラフを抽象化してそのグラフ同変コホモロジー環を出しました.