研究成果

大橋美佐

純虚ケーリー代数 $\mathrm{Im}\,\mathfrak{C}$ 内の曲線と向き付けられた 6 次元超曲面上の例外型単純 Lie 群 G_2 の作用で不変な幾何構造について研究した.

$\mathrm{Im}\,\mathfrak{C}$ 内の任意の可符号 6 次元超曲面上の概複素構造 ((1,1) 型テンソル場) が定義され, 具体的に記述される. この概複素構造は Lie 群 G_2 の作用に関しては不変であるが, 等長変換の作用で変換させた場合には, 一致するとは限らない. この様な現象に注目し, 本研究では, $\mathrm{Im}\,\mathfrak{C}$ 内の可符号超曲面上に誘導される概複素構造の一意性, 等質性に関する問題を考える. 特に強い条件 (リーマン多様体として等質な超曲面と仮定) の下で, 概複素構造の等長変換の作用による変形を記述することを目的とする. 更に, 誘導される概エルミート構造を保つ自己同型群を決定した. ただし, 自己同型群は埋め込みの取り方に依存する. そのために, 2 つのはめ込み $\varphi : M \hookrightarrow \mathrm{Im}\,\mathfrak{C}$, $\varphi' : N \hookrightarrow \mathrm{Im}\,\mathfrak{C}$ が G_2-合同 ($^\exists g \in G_2$, $^\exists a \in \mathrm{Im}\,\mathfrak{C}$, $^\exists \psi : M \to N$: orientation preserving diffeo $s.t.$ $g \circ \varphi + a = \varphi'$) となるための必要十分条件がそれぞれの誘導計量, 概複素構造, Complex 3-volume form が一致する事である事を示した. (超曲面の G_2-合同定理を得た.)

特に, $\varphi : M \hookrightarrow \mathrm{Im}\,\mathfrak{C}$ を $\mathrm{Im}\,\mathfrak{C}$ 内のリーマン等質な超曲面 (一般化された柱面) とする. このとき誘導される概複素構造は次の 4 種類に分類されることを示した.

(1) $M = \mathbf{R}^6,\ S^1 \times \mathbf{R}^5,\ S^5 \times \mathbf{R}^1,\ S^6$ の場合には, 誘導される概複素構造は G_2 の作用を除いて一意的であり, 等質である. また, 誘導される概複素構造を保つ自己同型群と等長変換群はそれぞれ次の様になる.

M	$Aut(M,J,g)$	$Iso^+(M)$
$\mathbf{R}^6$	$\mathbf{R}^6 \rtimes SU(3)$	$\mathbf{R}^6 \rtimes SO(6)$
$S^1 \times \mathbf{R}^5$	$U(2) \ltimes \mathbf{R}^5$	$SO(2) \times (SO(5) \ltimes \mathbf{R}^5)$
$S^5 \times \mathbf{R}^1$	$SU(3) \times \mathbf{R}^1$	$SO(6) \times \mathbf{R}^1$
S^6	G_2	$SO(7)$

(2) $M = \mathbf{R}^2 \times S^4$ の場合には, 誘導される概複素構造は G_2 の作用を除いて一意的であり, 等質ではない. 誘導される概複素構造とリーマン計量を保つ自己同型群は $U(2) \ltimes \mathbf{R}^2 (\subset SO(5) \times (SO(2) \ltimes \mathbf{R}^2))$ となる.

(3) $M = S^2 \times \mathbf{R}^4$ の場合には, 誘導される概複素構造は 1 パラメーターの変形を持ち, それらはすべて等質である. 誘導される概複素構造とリーマン計量を保つ自己同型群は変形のパラメーター α が $\alpha \in (0,\ \pi/3)$ のとき, $Sp(1) \ltimes \mathbf{R}^4 \subset SO(3) \times (SO(4) \ltimes \mathbf{R}^4)$, $\alpha = 0,\ \pi/3$ のとき $SO(4) \ltimes \mathbf{R}^4$ となる.

(4) $M = S^3 \times \mathbf{R}^3$ の場合には, 誘導される概複素構造は 1 パラメーターの変形を持ち, それらは等質ではない (ただし, 一つは等質である).

さらに, 超曲面上に誘導される概複素構造を保つ自己同型群を決定し, その作用を具体的に記述した. また, 純虚ケーリー代数内の曲線に関しても同様の基礎理論を構築した.