# 今後の研究計画

今後の研究として私は、これまでの研究を継続・発展させるととも、長期的には強擬凸多様体という特殊な対象だけでない研究対象を新たに見つけ、研究の幅を広げていきたいと考えています。

## §3.　これまでの研究の継続

私が現在取り組んでいる問題は CR $Q$-曲率流の研究結果の一般化と pseudo-Einstein 問題の完全な解決です。まず十分条件である CR Paneitz 作用素が本質的に正となることの幾何学的な意味を明らかにしたいと考えています。とくに埋め込み可能な強擬凸多様体では、CR Paneitz 作用素が本質的に正であることが知られていますが、逆が正しいかどうかは分かっていません。更に、今回は $Q=0$ を満たす接触構造を探す問題を考えましたが、今後の研究として『関数 $f$ に対して $Q=f$ を満たす接触構造は存在するか』(prescribed $Q$-曲率問題) という問題を考えています。これらの問題は、共形幾何の立場からは S.Brendle, A.Malchiodi, M.Struwe らにより研究が進められており、曲率流のの爆発現象などいくつかの興味深い現象が知られています。

Pseudo-Einstein problem 問題に対する研究では、今回用いられた技術的な条件 $[\Delta_b,\overline{\partial}_b^*]=0$ の意味づけを明らかにするところからはじめたいと考えています。$[\Delta_b,\overline{\partial}_b^*]$ という量は CR Paneitz 作用素 $P$ の低次項として現れるほか、CR Liouville 不等式などにも用いられ、この量の研究は CR 幾何学的に興味深いものと考えられます。

これまでの研究の継続・発展を進める方向において、私は次のように計画を考えています。

(i) CR Paneitz 作用素が本質的に正となる十分条件を幾何学的な側面から考察する。
(ii) 共形幾何学の場合を参考に prescribed $Q$-曲率問題や高次元化を研究する。
(iii) 作用素 $[\Delta_b,\overline{\partial}_b^*]$ の幾何学的特徴を調べ、pseudo-Einstein 問題の解決を目指す。
(iv) 問題に対する必要条件として、pseudo-Einstein 強擬凸多様体の幾何学を考察する。
(v) 強擬凸多様体における CR 擬正則の研究に新たな観点から取り組む。

## §4.　新たな取り組み

近年、佐々木多様体は Kähler 幾何学の一般化や数理物理的な視点から、広く研究が進められています (e.g. [A.Futaki, H.Ono, and G.Wang, Transverse Kähler Geometry of Sasakian Manifolds and Toric Sasakian-Einstein Manifolds, J. Differential Geom., 83 (2009), no. 3, 585-635.])。しかし、これらの研究手法では横断的正則座標と呼ばれる Riemann 葉層幾何学の概念が用いられ、一般の強擬凸多様体には適用することができません。このような理由から、私は一般的な強擬凸多様体がどのような葉層構造を持つかという問題に興味があります。強擬凸多様体における葉層構造の幾何学的性質を明らかにすることで、擬正則写像の理論への応用もできるのではないかと考えています。

また強擬凸多様体は sub リーマン構造を持つため、制御理論をはじめする応用数学にも関連が深いものと考えられます。共擬凸構造という純粋数学的概念がどのような応用的意味をもつかという研究にも取り組んでいきたいと考えています。

これらの新たな研究への取り組みに関して、次のような計画を考えています。

(i) 単位球面束は強擬凸多様体ではあるが、佐々木多様体ではないことが多い。単位球面束の Reeb 軌道の特徴を葉層構造の観点から研究していきたい。
(ii) 佐々木多様体の持つ構造は横断的 Kähler 構造と呼ばれている。これの一般化として横断的 symplectic 構造を持つ多様体の研究を考えてみたい。
(iii) 強擬凸多様体に関連の深い応用数学分野を探し、基礎知識を身につける。