

これまでの研究成果のまとめ

§1. 背景及び研究意義

私はこれまで、強擬凸多様体と呼ばれる CR 多様体に興味を持ち、その微分幾何学的側面の研究を行ってきました。強擬凸多様体は奇数次元における Kähler 多様体や symplectic 多様体の類似概念と考えられています。

定義 1: 多様体 (M^{2n+1}, θ, J) が強擬凸多様体であるとは、 M 上の接触構造 θ および $J \in \Gamma(\text{End}(M; \ker\theta))$ が次の条件を満たすこととする:

- (i) $J^2 = -1$, $[\Gamma(\ker\theta)^{1,0}, \Gamma(\ker\theta)^{1,0}] \subset \Gamma(\ker\theta)^{1,0}$,
- (ii) 対称テンソル場 $L(\cdot, \cdot) = d\theta(\cdot, J\cdot)$ が $\ker\theta$ 上で正定値.

強擬凸多様体は複素構造 $J : \ker\theta \rightarrow \ker\theta$ や非退化 2 形式 $d\theta$ を持つため、複素幾何学や symplectic 幾何学などで用いられるような研究手法を適用することができます。例えば、Serre 双対定理 (原著論文 [4],[5]) や Bochner formula ([Chang, Cheng, Chiu])、または Sasaki-Ricci 流などは、複素幾何学の奇数次元への一般化と考えられます。

§2. これまでの研究の概要、研究経過

とくに昨年度において私は、強擬凸多様体における CR Q -曲率と呼ばれる対象と pseudo-Einstein 問題について取り組んできました。先行研究において論文 [S.-C. Chang and J.-H. Cheng and H.-L. Chiu, A Fourth Order Curvature Flow on a CR 3-Manifold, Indiana Univ. Math. Journal, 56, No.4, (2007), 1793-1825.] では『定 CR Q -曲率を持つ強擬凸構造は存在するか』という問題に対して CR Q -曲率流の概念を導入し、ある条件の下で問題が肯定的に解決できることが示されています。

私は CR Paneitz 作用素 P_0 の解析的性質に着目し、 P_0 が準楕円型かつ本質的に正であるならば曲率流が大域的に存在し収束することを示しました (プレプリント [7])。また、 P_0 が順楕円型となるための幾何学的な十分条件の考察も行いました。これは研究 [Chang, Cheng, Chiu] の一般化および幾何学的な特徴づけとなっています。

Pseudo-Einstein 問題は CR 幾何学における、Kähler-Einstein 問題の類似問題で、条件 $\text{Ric}(\theta) = \lambda d\theta$ on $\ker\theta$ を満たす接触構造 θ を見つける問題です。この問題に対して、J.M.Lee による『 $c_1(T_{1,0}) = 0$ を満たす強擬凸多様体は pseudo-Einstein 接触構造を持つ』という予想が未解決問題として有名です。昨年度の研究では、私は J.M.Lee 予想に対する部分的結果を得ました (学術論文 [2])。論文 [2] において私は J.M.Lee の用いた方法と類似の手法を用いることにより、条件 $[\Delta_b, \bar{\partial}_b^*] = 0$ 及び $A_{\alpha\beta}{}^\alpha = 0$ が満たされると場合に、pseudo-Einstein 接触構造の存在を示しました。(但し、 $\bar{\partial}_b^*$ は $\bar{\partial}_b$ の形式随伴作用素、 $A_{\alpha\beta, \gamma}$ は pseudo-Hermitian torsion の共変微分とする。)

昨年度以前の研究では、複素 Monge-Ampère 方程式の研究 (国際会議講究録 [6]) や J -正則写像の研究 (学術論文 [3]) などを行ってきました。国際学会講究録 [6] では、強擬凸多様体が佐々木多様体になる場合において複素 Monge-Ampère 方程式が、連続法によって解くことができることを微分幾何学の立場から示しました。(この結果は Riemann 葉層構造を用いた解析的な研究がすでに行われている。)

論文 [3] 及びプレプリント [8] では強擬凸多様体において、symplectic 幾何学の J -正則写像に類似する概念を定義し、それらの写像の特異点除去定理と楕円型靴紐理論による解析的正則性を証明しました。私はこれらの結果を元に最終的には Gromov-Witten 理論の CR 幾何学における類似理論の構成を目指しています。