研究計画

山名俊介

正則保型形式のフーリエ係数が非常に豊富な算術的情報をもたらすことは、古典的保型形式論の驚くべき側面である。例えば、一変数保型形式のフーリエ係数の理論の整数論での重要性は自明である。重さ半整数の一変数保型形式ならば、さらに興味深く、フーリエ係数の平方は L 函数の特殊値と関係付けられ、ここでの符号の決定は今日でも未解明の問題である。多変数の場合も、テータ函数のフーリエ係数などは活発に研究され、二次形式論に深い成果を与えている。

一方、保型形式を一般的に捉える見方は「保型形式を群上の函数と考え、この群の作用により保型形式が生成する表現を考える」というものである。このようにして現れる表現を保型表現と呼び、保型表現を研究する分野を保型表現論と呼ぶ。保型表現論の重要な主題に異なる群の保型表現の間の対応を記述する問題がある。このような対応を記述する枠組みは、ラングランズにより予想され、ラングランズ関手性予想と呼ばれている。関手性はフェルマーの最終定理の証明にも応用されるなど、その重要性が近年さらに増大している。

これまでの筆者の研究では、主に古典的なフーリエ係数の理論を使って、正則保型形式の性質を解明してきた。しかし、これらの研究の一部は関手性も扱っており、関手性のさらなる研究には保型表現論の視点が不可欠である。今後の研究では、保型形式の整数論的構造を、フーリエ係数の理論と表現論的手法の主に二つのアプローチから解明することを目指したい。

以下のような研究を計画している。

1. **四元数ユニタリ群でのジーゲル・ヴェイユ公式の拡張**
   四元数型の簡約対の場合に、ジーゲル・ヴェイユ公式をアイゼンシュタイン級数やテータ積分が絶対収束しない範囲に拡張する。特に、四元数体上の分裂歪エルミート形式にはHasseの原理が成り立たないため、ジーゲル・ヴェイユ公式も興味深い等式になる。
2. **局所体上の古典群の表現の局所因子の研究**
   局所ラングランズ予想において、ガロア表現のアルチン型の L 因子、イプシロン因子に対応する局所体上の既約表現の不変量を局所 L 因子、局所イプシロン因子と呼び、それらの無限積を保型 L 函数、保型イプシロン因子と呼ぶ。これらは保型表現論の研究に根本的な役割を果たすにもかかわらず、現在のところ十分に理論が整備されているとは言い難い。局所因子や L 函数の理論を発展させ、表現論や算術的な問題に応用する。
3. **池田リフトの核関数の構成**
   斉藤-黒川リフトがテータ関数を核関数とする線形写像で与えられる一方、池田リフトの構成は具体的な表現の間の対応により与えられている。池田リフトが何らかの核関数による線形写像により構成できるかどうかは現時点では不明であるが、それが可能であれば、リフティングの理論に重要な進歩をもたらすはずである。
4. **保型形式のフーリエ係数による決定条件**
   論文 [1] の結果をヒルベルト保型形式や正則でない保型形式に拡張する。あるいは、決定を代数性や整数性に置き換えた問題を考察して見ることも意義があると思われる。