これまでの研究成果のまとめ

吉脇　理雄

多元環の表現論とはその環の加群のなす圏の構造を調べる事である．申請者はこれまで導来圏とその間の同値関手，さらには導来同値の下での不変量について主に研究してきた．これらは多元環の表現論において重要な道具である．例えば Grothendieck 群や大域次元の有限性など多元環の重要な情報が導来同値の下で不変となっている．近年，これらはリー理論，非可換代数幾何などにおいて重要な役割を果たすことが分かってきている．

ところでこれらを研究する上で，最も重要であるのが Rickard の仕事である．Rickard の定理は森田同値に関する森田の定理を，導来同値の特徴づけに一般化したものであった．すなわち，Rickard は森田同値関手の特徴づけを与える射影生成加群の概念を導来同値関手の特徴づけを与える傾複体という概念に一般化した．

一方，傾加群というものがある．これもまた射影生成加群の概念の一般化である．多元環 A と傾 A 加群 T の自己準同型環 $B = \mathrm{End}_A(T)$ は森田同値ではないけれども，ある部分圏が同値になることや大域次元の有限性が保たれることがわかり，よってその傾理論は重要であろう．傾加群はストーク複体としてみると明らかに傾複体となる．よって導来圏における森田理論は傾理論の一般化ととらえられるが，申請者が，ストーク傾複体は逆に傾加群を与える，ということを示したことにより，その関係はさらに明瞭になった（論文リスト [1]）．

ところで自己入射多元環においては表現次元というものが導来同値不変量となる（Guo+Rickard）．表現次元は Auslander により有限表現性などの表現論的な性質を大域次元などのホモロジー代数的な量で制御しようとする考えを基に提唱された．表現次元の概念自体は扱い易いものではなかったが，多元環の表現論に多くの興味深い問題を提供し，また近年のクラスター傾理論の一つの源流ともなった重要な概念である．

表現次元に関連して近年導入された概念に，三角圏の次元がある（Rouquier）．これも大域次元と同じく幾何学的な次元を圏論的に定式化しようとの試みである．特に (自己入射) 多元環の安定次元や導来次元は大域次元や表現次元と強い関係があり（Rouquier）、表現論的に興味深い．

安定次元とはその自己入射多元環の安定圏の三角圏としての次元のことであり，特に導来同値不変量である (Rickard)．定義より直ちに自己入射多元環が有限表現型ならばその安定次元は零になることがわかる．ではその逆は成り立つであろうかという自然な問題があるが，申請者はこれを肯定的に解決した（論文リスト [3]）．これは多くの専門家が成り立つであろうと信じてはいたが，これまで証明は与えられていなかったものである．

また，その応用として Chen-Ye-Zhang の結果を改良し，導来次元が零の多元環と安定次元が零の自己入射多元環の間には密接な関係があることも示した（論文リスト [5] もしくは [4]）．さらに表現次元と関連のある新たな予想を立てた．今後はこの予想について考えたい．