今後の研究計画

小畑久美

今後の研究計画の最大の目標は 3 つある．

空間グラフに含まれる結び目の評価

n 頂点完全グラフ K_n の空間埋め込み f を考える．$f(K_n)$ が含む結び目の最小交点数の最大値を $c(f(K_n))$ とする．すべての空間埋め込みについて考えたときの $c(f(K_n))$ の最小値を $\alpha(n)$ とする．Conway と Gordon は 7 頂点完全グラフのすべての空間埋め込みは非自明な結び目を含むことを証明した．いいかえると $\alpha(7) = 3$ である．1 つめの目標は n と $\alpha(n)$ の比較である．具体的には「4 以上の整数 n に対し，$\alpha(2n-1) = \alpha(2n) = 2n-5$ が成り立つか？」という問題を考えている．この問題はこれまでの研究成果のまとめで述べた「$(2n-1)$ 頂点完全グラフと $2n$ 頂点完全グラフの螺線埋め込みが $(2n-5, 2)$ 型トーラス結び目を含む.」という結果から予想される．

この問題の解決方法として，螺線埋め込みを手がかりに少しずつ交差交換をしても正しいことを証明する方法を考えている．具体的なステップとして，まず最初に $n = 5$ の場合に解決しようとして研究を進めている．そこで「9 頂点完全グラフの螺線埋め込みに対して，xy 平面に射影して現れる交点を 1 つ選んで交差交換をしても最小交点数 5 の結び目を含む」ことは分かった．7 頂点完全グラフは非自明な結び目を含むという Conway と Gordon の定理は Arf 不変量を使って証明されている．しかし，Arf 不変量では最小交点数を評価できない．そのためグラフを任意に交差交換しても変化せず，しかも最小交点数を評価できるような不変量見つけたい．

円周数による結び目表の作成

目標の 2 つめは円周型埋め込みについての結び目表を作ることである．成果で述べたが，円周数と最小交点数との間には (1) $\mathrm{Circ}(K) \leq c(K) + 2$，(2) $\mathrm{Circ}(K) \geq 2$ のとき $2\{\mathrm{Circ}(K)\}^2 - 3\mathrm{Circ}(K) \geq c(K)$ の関係がある．これより円周数を固定すると結び目は高々有限個であることがわかる．この事実より，円周数による結び目表を作ることが可能であると分かる．そのために最初に考えるべきことは,「円周数が 4 である素な結び目は 8 の字結び目か？」という問題である．

この問題の解決方法として以下のことを考えている．円周を平面に射影すると楕円になる．4 つの楕円の平面へのはめ込みは組み合わせ的には有限個である．4 つの楕円に含まれる射影図も高々有限個である．すなわち，円周型埋め込みで作られる結び目でそのような射影図をもつものも高々有限個である．原理的にはこの方針で解決出来るはずである．しかし楕円の長軸と短軸の長さや比率は自由に変えられる．よって，この複雑さにより解決には至っていない．しかしながら，アルゴリズムを作るなどの方法で円周数の一般的な性質にせまれるのではないかと考えている．

グラフと有向グラフの個数の関係

偶数 n に対して，$2n$ 頂点グラフと n 頂点有向グラフの自己補グラフの個数は等しいことが Read により示されている．私達はグラフを辺着色グラフとみなすことで自己補性を巡回自己同型へと一般化し，その個数に関する定理をグラフの場合と有向グラフの場合に得た．これを用いて辺着色下での，巡回自己同型なグラフと有向グラフの個数の関係を定式化することを目指す．

そのためのアプローチとして 2 通りの方法を考えている．1 つめは Read の結果を参考にして，対応する巡回自己同型グラフの辺の個数の共通因数を用いることである．有向グラフとグラフの同値関係の違いにより，私達の得た 2 つの公式を単純に比較することは難しい．解決方法としては巡回自己同型な有向グラフとグラフの対応関係を，頂点数の少ないグラフから帰納的に構成する方法を考えている．2 つめは，巡回自己同型な有向グラフから巡回自己同型なグラフを具体的に構成することから導くことである．巡回自己同型なグラフの個数は私達の結果を使えば機械的に計算可能であるが，具体的構成は非常に難しくテクニックが必要である．私達には先の研究で得た経験により，簡単ではないが構成方法の技術がある．