これまでの研究成果のまとめ

小畑久美

文中では論文リストの番号で該当する論文を指します.

私は「空間グラフに含まれる結び目の研究」に取り組んでいる．空間グラフのサイクルで，結び目 K と同値なものがあるとき，この空間グラフは結び目 K を含むという．1983 年に Conway と Gordon により 7 頂点完全グラフの任意の空間埋め込みは非自明な結び目を含むことが示された．この定理を精密化することを考え研究を続けている．

完全グラフの頂点を螺線にのせる線形埋め込みを螺線埋め込みと呼ぶ．田中氏との共同研究 [1] により「$(2n-1)$ 頂点完全グラフと $2n$ 頂点完全グラフの螺線埋め込みが $(2n-5,2)$ 型トーラス結び目を含む」ことを証明した．この結果は埋め込みを制限しているが，結び目の型も決定しているという点において Conway と Gordon の結果より精密な情報を与えている．

次に円周型埋め込みというものを考えた．この埋め込みも螺線埋め込みを一般化するために考えた．グラフの任意の辺が円周にのるような埋め込みを円周型埋め込みという．任意のグラフは円周型埋め込みを許容するが，円周型埋め込みと同値でない空間グラフは存在する．ここからは結び目だけを考える．ただし，結び目を円周と同相な空間グラフとみなす．ここで，頂点の個数は任意とする．結び目 K の円周数 $\mathrm{Circ}(K)$ を n 頂点グラフの円周型埋め込みで，K と同値なものが存在するような n の最小数により定義する．線形埋め込みの場合，非自明な結び目を構成するために必要な辺は少なくとも 6 本必要であるが，円周型埋め込みは 3 本の円弧で非自明な結び目を構成できる．このことから，円周型埋め込みは線形埋め込みより一般の埋め込みに近いと考えた．田中氏との共同研究 [1] により，円周数と既存の不変量 stick number，arc index，最小交点数，bridge number，superbridge number との比較を得た．

さらに，次の結果を得た.「結び目が三葉結び目であることと円周数が 3 であることは同値である.」「結び目が 8 の字結び目ならば円周数は 4 である.」「三葉結び目とその鏡像の連結和は円周数が 4 である.」したがって円周数は連結和に関して加法的でないことも分かった．

結び目 K に対し，不変量 $u_n(K)$ を m 回交差交換することで得られる結び目が n 頂点グラフの円周型埋め込みにより実現される m の最小数として定義した．上の結果より，三葉結び目 3_1 に対し，$n \leq 2$ のとき $u_n(3_1)=1$，$n \geq 3$ のとき $u_n(3_1)=0$ である．一般に，不変量 $u_n(K)$ は n が 2 以下なら K の結び目解消数と等しい．この意味で，$u_m(K)$ は結び目解消数の一般化とみなせる．

また,「自己補性をもつグラフの個数に関する研究の辺着色グラフへの拡張」にも取り組んでいる．自己補グラフの同型類の個数は，偶数個の辺をもつ同型類の個数と奇数個の辺をもつ同型類の個数の差に等しいという予想（Royle 予想）が知られていた．2008 年，Nakamoto, Shirakura, Tazawa により Royle 予想の証明が与えられた．さらに 2010 年，Royle 予想の証明は Tazawa, Ueno により，2 部グラフの場合に拡張された．ここで，グラフとその補グラフに異なる色を付け重ね合わせると 2 色の辺着色完全グラフとみなすことができ，一般の r 色の辺着色完全グラフの特別な場合に対応している．この観点から私達は自己補性の概念を拡張して巡回自己同型を定義し，Royle 予想の証明の核となった公式を辺着色 2 部グラフと辺着色有向グラフ場合へ一般化した．その際 Tazawa, Ueno の証明には Burnside の補題がうまく適用できるが，私達の証明には適用できず，Burnside の補題を拡張することで結果を得た．私達の結果は，一般のグラフの同型類の個数を用いて巡回自己同型なグラフの個数を数え上げることを可能にした．

一般的にグラフとは頂点と辺の集合であり，辺とは 2 頂点を結ぶ線分として定義されるものである．この定義の拡張として，辺を面（3 頂点部分集合）や立体（4 頂点部分集合）として捉えるハイパーグラフと呼ばれるものが知られている．これは通常のグラフを含む概念である．私達は上記の結果をこれらの場合に拡張した．ただし，私達の結果はハイパーグラフではなく，h-ハイパーグラフを扱う．ここで，h-ハイパーグラフとは h 頂点からなる部分集合のみを辺とみなしたものであり，理論の自然な受け皿として h ハイパーグラフが適切だからである．