今後の研究計画

黒木慎太郎

将来はこれまでに行った研究を発展させた研究、または関連した研究に取り組む予定です.

トーリック多様体と toric HK 多様体をトポロジーの視点で統一する. Toric HK 多様体は空間としてはトーリック多様体と大きく異なっているのですが、二つの空間の間では非常に似たような現象が起きます. 例えば、同変コホモロジーが対応する組み合わせ論的な対象の Stanley-Reisner 環で記述できることや、同変コホモロジー的剛性定理が成立することなどがそのような現象と言えます. 現在は、(30) で『トーリック多様体と toric HK 多様体上で起きる類似した現象を統一する』と言う動機の下で、toric HK 多様体のトポロジカルな拡張に当たるクラスを定義しそれを研究しています. 現在まで、(15) の結果を用いて同変コホモロジー環を出すことができました. この研究は (15) で定義した組み合わせ論的な対象 (ハイパートーラスグラフ) の幾何的な対応物に関する研究と考えることが出来ます。今後は、より幾何的な性質を研究して、最終的にトーラス多様体の四元数化に当たるものを定義して研究することが目標です.

GKM 多様体上の拡張作用の研究. Wiemeler の結果によると、一般のトーラス多様体の拡張作用として、(6), (9) で出てきたような SU, SO 型 (つまり root 系として A_ℓ, B_ℓ, D_ℓ 型を持つもの) のみが現れることが分かります. そこで、『他の型が出てくる多様体のクラスは何か？』と言う問題が自然に生じます. そのようなクラスとして期待されているのが GKM 多様体です. GKM 多様体には同一階数の等質空間 G/H が全て含まれます. よって $A_\ell \sim G_2$ 型全ての root 系に対応する群が拡張作用として出てくると期待されます. 現在は、GKM 多様体の拡張作用を、Masuda-Wiemeler 等とともに GKM グラフを通して研究しています.

更に GKM 多様体上ではトーラス作用から次元の大きなトーラス作用への拡張も考えることができますが、その障害についても現在 Park と共に研究しています.

さまざまなクラスの分類問題に関連する問題. 次のクラスについての分類問題（剛性問題）に関連することを考えてみたいと思っています.

(1) (擬) トーリック多様体上のコホモロジー剛性問題;
(2) トーラス多様体でコホモロジー剛性を満たす物の特徴付け;
(3) 単連結トーラス多様体の分類（ある予想の検証）;
(4) $\mathbb{C}P$ タワーのホモトピー剛性問題;
(5) $\mathbb{C}P$ タワーがいつコホモロジー剛性を満たすか, 他のコホモロジー理論ではどうか？（Ray と KO 理論に関して研究している）;
(6) 次元を固定した toric HK 多様体のコホモロジー剛性問題;
(7) aspherical small cover のコホモロジー剛性問題.

特に、上記の (3) の問題はトーラス多様体から定義される multi-fan の特徴付けにもかかわってくる問題なので、大切な問題だと思っています.