研究計画

室谷 文祥

種数 1 の n-ノイド（$n \in \mathbf{N}$）について、モジュライ空間を明らかにすることが大きな研究課題である。しかし、トーラスのホモロジー生成元に関する周期問題が障害となり、完全に一般の n-ノイドを考えることは困難である。そこで、まずは、面対称性をもち、エンドがその対称面上にのっており、すべてのエンドがカテノイド型である、n-エンド・カテノイドについて、以下の 3 つの課題を考えたい。

1. n-エンド・カテノイドの崩壊に関する研究

R. Schoen は、カテノイドにハンドルをつけることができないことを示した。この結果により、フラックス・データが「種数 1 のカテノイド（2-エンド・カテノイド）」に近づく n-エンド・カテノイドは崩壊する。また、一般に n-エンド・カテノイドの任意の列は、部分列をとれば（分岐をもつ）全曲率有限な極小曲面の和に収束することが知られている。私は大阪市大・加藤氏との共同研究により、n-エンド・カテノイドの具体例を構成したが、それらの例のいくつかは、フラックス・データが「種数 1 のカテノイド」に近づく。ハンドルのフラックス等を評価し、崩壊の様子を具体的に捉えることを研究課題のひとつとする。

2. $D_n \times \mathbf{Z}_2$ 対称性（D_n:二面体群）をもつ n-エンド・カテノイドの完全決定

$D_n \times \mathbf{Z}_2$ 対称性をもつ n-エンド・カテノイドは、隣り合うエンドのなす角は $360° \times k/n$ ($k \in \mathbf{N}$, k と n は互いに素な自然数, $k \leqq n-1$) となる。$n = 2$ の場合、上述の R. Schoen の結果から、2-エンド・カテノイドは存在しない。$n = 3$ の場合、Berglund-Rossman により、隣り合うエンドのなす角が $120°$ の 3-エンド・カテノイドが構成されている。また、我々は、隣り合うエンドのなす角が $240°$ の 3-エンド・カテノイドが存在しないことを示した。n が一般の場合にも様々な具体例が構成されるが、私はこれらを一般化し、「$D_n \times \mathbf{Z}_2$ 対称性をもつ n-エンド・カテノイドが存在するための必要十分条件は、隣り合うエンドのなす角が $180°$ 未満となることである」ことを予想する。この予想の真偽を確かめ、$D_n \times \mathbf{Z}_2$ 対称性をもつ n-エンド・カテノイドのモジュライ空間を明らかにすることを研究課題のひとつとする。

3. n-エンド・カテノイド・フェンスの崩壊に関する研究

閉じない周期がひとつ残る、n-エンド・カテノイド・フェンスを考える。$D_n \times \mathbf{Z}_2$ 対称性をもち、隣り合うエンドのなす角が $360° \times k/n$ となる n-エンド・カテノイド・フェンスを崩壊させると、周期とウェイトの比は $2\pi/\sin(\pi/n)$ となる。この極限値の意味を明らかにし、より一般の n-エンド・カテノイド・フェンスについても崩壊の様子を捉えることを研究課題のひとつとする。