研究成果

室谷 文祥

$\mathbf{R}^3$ における全曲率有限な完備極小曲面のうち、n 個のエンドをもち、そのすべてが埋め込まれたエンドとなるものを n-ノイドという。埋め込まれたエンドにはウェイトが定義され、ウェイトの値が 0 になるものは平面型エンド、ウェイトの値が 0 ではないものはカテノイド型エンドである。特に、すべてのエンドがカテノイド型となる n-ノイドを n-エンド・カテノイドと呼ぶ。

私は種数 1 の n-エンド・カテノイドについて研究している。

X を n-ノイド、$\{q_1, \ldots, q_n\}$ を X のエンド、w_j を q_j のウェイト、G を X の拡張された Gauss 写像とする。このとき、$\{w_1, \ldots, w_n\}$ と $\{G(q_1), \ldots, G(g_n)\}$ の組は X のフラックス・データと呼ばれ、Gauss の発散公式により、$\sum_{j=1}^{n} w_j G(q_j) = 0$ が従う。逆に、「$\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}$ と $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbf{S}^2$ の組を $\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0$ を満たすように与えたとき、それをフラックス・データとする n-エンド・カテノイドが存在するか」という問題はフラックス逆問題と呼ばれる。種数 0 の場合、フラックス逆問題は大阪市大・加藤信氏、東工大・梅原雅顕氏、東工大・山田光太郎氏により研究され、ほとんどすべての組に対し、それをフラックス・データとする n-エンド・カテノイドが存在することが示されている。

種数 1 の場合、定義域の Riemann 面がトーラスから有限個の点を除いたものとなり、Weierstrass データは楕円関数により表示される。我々は Weierstrass データに現れる楕円関数、楕円型 1 形式の零点と極に関する考察から、n-ノイドは大きく、$\omega = \omega_2$, $\omega = 0$ の 2 つのクラスに分けられることを示した。以下、それぞれのクラスについて研究結果を述べる。

1. $\omega = \omega_2$ のクラス

我々は [1] において、円環領域上の関数を用いて定式化を行い、n-ノイドが存在するための必要十分条件を記述した。既知の具体例のうち、Costa 曲面、Berglund-Rossman によって構成された $D_n \times \mathbf{Z}_2$ 対称性をもつ n-エンド・カテノイド（D_n:二面体群, $n \geqq 3$）など、カテノイド型エンドをもつものは、このクラスに含まれる。私は、加藤氏の助言のもと、この定式化により、新たな具体例として、$D_N \times \mathbf{Z}_2$ 対称性をもつ $2N$-エンド・カテノイドの 1 係数族（$N \geqq 3$)、長方形の対称性をもつ 4-エンド・カテノイドの 1 係数族、二等辺三角形の対称性をもつ 3-エンド・カテノイドの 2 つの係数族等を構成した。

2. $\omega = 0$ のクラス

我々は [2] において、周期平行四辺形上、Weierstrass のゼータ関数を用いて定式化を行い、n-ノイドが存在するための必要十分条件を記述した。このクラスに含まれる既知の例として、Costa の 4-ノイド、および、その Kusner-Schmitt による一般化が挙げられるが、これまで、カテノイド型エンドをもつ例は知られていなかった。私は、被覆空間をとることにより、$\omega = \omega_2$ のクラスに属する n-ノイドについて、その Weierstrass データが、$\omega = 0$ のクラスにおける定式化により表示されることを示した。また、私は加藤氏の助言のもと、このクラスに属する新たな例として、$D_N \times \mathbf{Z}_2$ 対称性をもつ $2N$-エンド・カテノイド（N は 3 以上の奇数)、$D_N \times \mathbf{Z}_2$ 対称性をもつ N-エンド・カテノイド（N は 5 以上の奇数）を構成した。また、このクラスでは、定義域が長方形であり、面対称性をもち、エンドがその対称面上にのっており、定義域においてエンドが一直線上にならぶ例は存在しないことが示される。