これまでの研究成果

奈良　忠央

楕円曲線とは，Weierstrass 標準形 と呼ばれる 3 次方程式で定義される代数曲線 E であり，無限遠点 O を単位元とする群構造を持つことが知られている．E の有理点のなす群 $E(\mathbb{Q})$ (Mordell–Weil 群) は有限生成アーベル群であり，その群構造を調べることは古くから整数論で考えられており，現在でも研究されている．

Duquesne や藤田などは，単に楕円曲線の有理点の独立性を調べるだけでなく，それが free part の一部になりえるといったタイプの結果を先行結果として出している ([1],[2]). Duquesne や藤田により考察された楕円曲線としては，$y^2 = x^3 - nx$ という形で n が特殊な形（それゆえに明示的に表された有理点を持つ）をしたものが考察されている．

私は藤田氏との共同研究で，$y^2 = x^3 + n$ という形をした楕円曲線で n が特殊な形をしたものに対して類似の現象が示せることを考察した ([A]).

証明の手法は Duquesne のものと同様、楕円曲線の canonical height の評価を行い，Siksek の定理に適用するというものである．caninical height の評価は local height による分解を通して行い、その計算では Tate の公式，Cohen の公式，Silverman のアルゴリズムを使い分けた。証明の過程では特定の有理点の canonical height の上界を評価する必要があり，Duquesne のケースではうまい具合にその上界が小さくなったが，われわれの場合にはそうならないので descent の議論などで補間を行う必要があった．

前述の Siksek の定理は 2 次形式の理論に由来する定理であり、canonical height の下界にランクに応じた定数倍をすることによって楕円曲線の regulator の下界が得られ、結果として選んだ点の集合がどれだけ生成系に近いかがわかるという内容のものである。

私はさらに，一般の楕円曲線の 2 次ツイストに関しても類似の考察を行った ([B]). 証明の過程では，canonical height の一様な下からの評価を行う必要が生じるが，楕円曲線の等分多項式の間に成り立つ恒等式をうまく利用することによりこれを行った．そしてその応用という形で，明らかな有理点を一つ持つ楕円曲線の族を構成し，そのほとんどについて，その有理点が原始的であることを示した.

参考文献

[1] S. Duquesne. Elliptic curves associated with simplest quartic fields. *J. Theor. Nombres Bordeaux*, Vol. 19, pp. 81–100, 2007.

[2] Y. Fujita and N. Terai. Generators for the elliptic curve $y^2 = x^3 - nx$. *J. Theor. Nombres Bordeaux*, Vol. 23, pp. 403–416, 2011.