研究成果

大橋 美佐

四元数 $\mathbf{H}$ の直和 $\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$ に次の積構造を導入した環をケーリー代数 $\mathbf{O}$ とよぶ. $(a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon)=(ac-\bar{d}b)+(da+b\bar{c})\varepsilon$, ここに $a,b,c,d\in\mathbf{H}$, $\varepsilon=(0,1)$ を表す. "$^-$" は $\mathbf{H}$ の共役を表す. $\mathbf{O}$ は非可換, 非結合的, 交代的な可除代数となる. $\mathbf{O}$ 内の 3 次元ベクトル空間を V とし, $u,\ v$ を互いに直交する V の元とする. $V=span_{\mathbf{R}}\{u,\ v,\ u\times v\}$ となるとき V を associative plane とよぶ. ここに, $u\times v=\dfrac{1}{2}(\bar{v}u-\bar{u}v)$ を表す.

$\mathbf{O}$ の積を保つ自己同型群を $G_2=\{g\in SO(8)\mid g(uv)=g(u)g(v)\ \ \text{for}\ {}^\forall u,\ v\in\mathbf{O}\}$ と定める. $g(1)=1$ より $G_2\subset SO(7)$ であり, G_2 は 14 次元のコンパクトな例外型単純 Lie 群となる.

ケーリー代数の純虚数部分 $\mathrm{Im}\,\mathbf{O}=\{x\in\mathbf{O}\mid\langle x,1\rangle=0\}$ を $\mathbf{R}^7$ と同一視する. $\mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ 内の 2 つの曲線を $\gamma_1,\ \gamma_2:I\to\mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ とする. γ_1 と γ_2 が G_2(resp. $SO(7)$)-合同であるとは ${}^\exists g\in G_2(\text{resp. }SO(7))$, ${}^\exists a\in\mathbf{R}^7$, ${}^\exists s_0\in\mathbf{R}\ \ s.t.,\ \ g\circ\gamma_1(s)+a=\gamma_2(s+s_0)$ を満たすことをいう. ここに s は弧長を表す. 曲線は C^∞ 級であると仮定する.

$\mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ 内の曲線, 特に $\mathbf{R}^7\rtimes SO(7)$ の作用に関して等質である helix を γ_0 とする. 本研究の目的は γ_0 と $SO(7)$-合同である曲線全体の G_2-合同による同値類全体の為す空間を理解することである.

helix の G_2-moduli 空間 最初に Stiefel 多様体の G_2 軌道分解について述べる. 6 次元単位球面が $S^6\cong G_2/SU(3)$ であり, 5 次元単位球面が $S^5\cong SU(3)/SU(2)$ であることから $\mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ 内の orthonormal 2-frame 全体の為す Stiefel 多様体は

$$V_2(\mathrm{Im}\,\mathbf{O})=SO(7)/SO(5)\cong G_2/SU(2) \tag{$*$}$$

となる. 一般に $\mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ 内の orthonormal 3-frame $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ に対して $e_1\times e_2=e_3$ は成立しない. 従って orthonormal k-frame 全体の為す Stiefel 多様体 $V_k(\mathrm{Im}\,\mathbf{O})=SO(7)/SO(7-k)$ $(k=3,4,5)$ を G_2 の左からの作用で軌道分解すると,

$$\begin{aligned}
&\sim_{G_2}\backslash V_3(\mathbf{R}^7)=\sim_{G_2}\backslash(SO(7)/SO(4))\cong[0,\ \pi]^*,\\
&\sim_{G_2}\backslash V_4(\mathbf{R}^7)=\sim_{G_2}\backslash(SO(7)/SO(3))\cong\{0\}\sqcup\big((0,\ \pi)\times S^3\big)\sqcup\{\pi\},\\
&\sim_{G_2}\backslash V_5(\mathbf{R}^7)=\sim_{G_2}\backslash(SO(7)/SO(2))\cong\big(\{0\}\times S^2\big)\sqcup\big((0,\ \pi)\times S^3\times S^2\big)\sqcup\big(\{\pi\}\times S^2\big)
\end{aligned}$$

となる. $(\quad)^*$ は特異点を持つ軌道空間を表す.

これより, 次のことが成立する. $\mathbf{R}^k$ を $\mathrm{Im}\,\mathbf{O}$ の k 次元ベクトル空間とし, $\mathbf{R}^k$ 内の helix $\gamma_0:I\to\mathbf{R}^k(\subset\mathrm{Im}\,\mathbf{O})$ を任意に 1 つ取り固定する. ただし, 第 $(k-1)$ 曲率は 0 でないと仮定する. γ_0 と同じ曲率を持つ helix 全体の G_2-合同類の為す集合を $\Gamma^k_{\gamma_0}=\{h\circ\gamma_0:I\to\mathbf{R}^k\mid h\in SO(7)\}/\sim_{G_2}$ とおく. $k=2,3,4$ のとき

$$\begin{aligned}
&\Gamma^2_{\gamma_0}\cong\{1\},\\
&\Gamma^3_{\gamma_0}\cong\{\theta\mid\theta\in[0,\ \pi]\},\\
&\Gamma^4_{\gamma_0}\cong\{(\theta,\ \alpha,\ \sigma_{(\theta,\alpha)}(s))\mid\theta\in[0,\ \pi],\ \alpha\in S^3,\ \sigma_{(\theta,\alpha)}:I\to S^1\}
\end{aligned}$$

が成立する. $\{1\}$ は $SO(7)$-合同ならば G_2-合同であることを表す.