研究成果

恩田健介

与えられた C^∞ 級多様体上に代表的な (擬) リーマン構造を決定する問題は, 微分幾何学での重要な問題の一つである. アインシュタイン構造とリッチソリトン構造はこの質問に対する代表的な答えであり, 私はリッチソリトン構造に関する研究を行った.

n 次元多様体 M^n 上の擬リーマン計量 g_0, ベクトル場 X, 定数 α が

$$-2\mathrm{Ric}[g_0] = L_X g_0 + \alpha g_0$$

を満たすとき, (M^n, g_0, X, α) をリッチソリトン構造といい, その時の計量 g_0 をリッチソリトンという. 定義から明らかなように, リッチソリトンはアインシュタイン計量の一般化の一つになっている. リッチソリトンはリッチ流方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t)_{ij} = -2\mathrm{Ric}[g(t)]_{ij}$$

の微分同相とスケーリングによって変形する解であることが知られている.

一般にリッチソリトンを求める問題は, 二階の偏微分方程式を解く問題となる. しかし, 等質多様体上のリッチソリトンは, 代数方程式で求められる Algebraic soliton(sol-soliton) と関係が深いことが Laruret(2001) の研究で示された. Algebraic soliton(sol-soliton) は次のように定義される.

$M = G/H$ を等質多様体とし, g を左不変 擬リーマン計量とする. リー環の微分 $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ と定数 c, リッチ作用素 Rc, 射影 $pr : \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ が次の方程式

$$Rc = cI + pr(D)$$

を満たす時, 左不変擬リーマン計量 g を Algebraic soliton(sol-soliton) という.

Lauret は等質多様体上の非自明な sol-soliton はリッチソリトンであることを示した. Algebraic soliton (Sol-solitons) は代数的な手法でリッチソリトンを学ぶことを手助けする.

Lauret による研究はリーマン幾何の範囲での研究であったが, 私はこの研究を擬リーマン幾何の範囲で研究を行なった ([3]). そして, 私は H_3, $E(2)$, $E(1,1)$, H_N, $G_m(\lambda)$ 上の Lorentzian sol-solitons を構成した. H_3, $E(2)$, $E(1,1)$, H_N 上の sol-soliton は shrinking, $G_m(\lambda)$ 上の sol-soliton は steady であり, これはリーマン計量の範囲では存在しない例である. [4] では, three-dimensional unimodular Lie groups と in non-symmetric non-unimodular Lie groups 上の Lorentzian algebraic Ricci soliton の完全な分類を行った. [5] では, four-dimensional pseudo-Riemannian generalized symmetric space 上の algebraic Ricci soliton の分類を行った.