今後の研究計画

大田武志

4 次元の量子場の理論のある側面は、2 次元の量子場の理論とよく似ているという事象は昔からいろいろな人によって指摘されてきた。とくにそれは、共形対称性を持つ場合に顕著であり、2 次元理論の可積分性と深い関わりがある。弦理論やゲージ理論、そして関連した可積分理論などで、この現象はしばしば注目を集めてきている。

最近、多くの種類の $\mathcal{N}=2$ 超共形対称性をもつ 4 次元のゲージ理論 (一般化された $SU(n)$ クイバーゲージ理論) が、Gaiotto によって構成された。この理論の研究をしていた、Alday-Gaiotto-立川 (AGT) の 3 人によって興味深い予想が提案された。$SU(2)$ クイバーゲージ理論の Nekrasov 分配関数は、2 次元共形場の理論の一つである Liouville 模型のコンフォーマル・ブロックによって記述できるだろうというものである。この AGT 予想は、すぐに、$SU(n)$ の場合に拡張された。4 次元の $SU(n)$ ゲージ理論の Nekrasov 分配関数は、2 次元共形戸田場の理論のコンフォーマル・ブロックによって記述できるだろうという予想である。現在、この予想についての検証や、証明しようという試みが精力的になされている。

Nekrasov 分配関数は、ゲージ理論のインスタントン分配関数を「Ω 背景」とよばれる背景時空を用いて正則化したもので、正則化をおこなう 2 つのパラメータ ϵ_1, ϵ_2 を含んでいる。これらのパラメータをゼロとする極限 ($\epsilon_1=-\epsilon_2\to 0$) で、主要な項は、Seiberg-Witten の prepotential を再現する。

糸山-大田は、コンフォーマルブロックの Dotsenko-Fateev の多重積分表示を β-変形した行列模型と解釈し、それをうまく書きかえることによって、Selberg 型の β-変形行列模型とみなせることを示し、その行列模型の q-展開の計算手法を確立した。q-展開の各項を Jack 対称多項式を基底として展開すると、多重積分が評価できることを利用した。これは、行列模型においてよくおこなわれる、行列のサイズ N を無限大にする計算とは異なり、有限の N で計算が実行できる。ラージ N 極限をとって、あらわれる Seiberg-Witten 曲線を比較するのではなく、直接、Nekrasov 分配関数と比較できるという点において画期的な結果である。そしてわれわれは、$SU(2)$ ゲージ理論でフレーバー数が $N_f=4$ の場合の Nekrasov 分配関数と、最初の数項を比較して、たしかに行列模型の結果とパラメータの読み替えで合致することを示した。

そして、糸山-大田-米澤は、この行列模型のスケーリング極限を考え、$N_f=4$ から $N_f=3$ そして $N_f=2$ の Nekrasov 分配関数、あるいは irregular コンフォーマルブロックに対応する行列模型を得た。そこで、引き続き、$N_f=1$ や $N_f=0$ の場合への極限を考察していきたい。

また、糸山-大田は、最近、$A_n^{(1)}$ 型のクイバー行列模型の考察を行った。そこで、その他のクイバー型の行列模型への拡張を試みる。そして、そのクイバー行列模型と、超対称ゲージ理論との対応がどうなっているか解明していきたい。

また、未解決な点としては、Jack 対称多項式を用いて計算自体は遂行できるが、Nekrasov 分配関数との対応を考える上では、それはよい展開基底とはなっていないということがあげられる。斉次多項式の Jack 対称多項式ではなく、未知の非斉次多項式がよい基底となることが判明しているが、その特徴付けなど明らかにすべき点は多い。そういった点も明らかにしていきたいと考えている。