今後の研究計画　（高木　聡）

今後の研究における大きな目標としては、ZR 空間を双有理幾何学の各方面、特にボリュームなどの漸近的不変量への応用を考えることである。ただし、現段階で ZR 空間を実用にこぎつけるまでに示さなければならないことはまだまだ多い。

最初の数年間は $\mathscr{A}$-スキームの基礎理論の構築を、特に ZR 空間への応用に焦点を絞って考える。

a, 連接加群及び直線束の理論の構築

以下は副有限性位相をもつ ZR 空間を対象に考える。ZR 空間はスキームと違い、アフィン近傍がとれない点があり、扱いが難しくなる。特に局所環が付値環、すなわち一般的にネーターでない点が現れる。このため、有限生成加群の振る舞いが悪くなる。ただし、付値環は連接環なので連接層 (ここでは有限生成局所自由化群の間の射の商のことを指す) を考える上ではそれほど困難は生じないと考えられる。特に、ZR 空間はスキームの双有理写像による極限なので、ZR 空間上の直線束はあるスキームからの引き戻しで必ず表せる。これは Fernex[**?**] の考えるように直線束の形式的余極限が ZR 空間の直線束になることを意味する。

以下、ZR 空間上の直線束の場合に話を限定する。この場合、豊富直線束は残念ながら考えることができない (ZR 空間は 2 次元以上の場合、例外点を持てば射影空間への埋め込みは不可能である) が、基点なし、準豊富、ネフ、巨大などといった直線束 (あるいはその上の線形系) の概念は通常と同じように扱えるのみならず、ZR 空間の特性で非常に見通しのよい理論を構築できるはずである。もっとも期待できるのは、直線束のボリュームなどの漸近的不変量に関する理論への応用である。

b, 微分加群、平滑性の理論

以上のことを目標としては 2 年以内にある程度目途をつけた上で、その後は微分加群、及び平滑性の議論を進めていく。形式的不分岐性、形式的平滑性などの定義は可換環のべき零拡大を用いた持ち上げ性質を用いて通常のスキームの場合と同様に定義できる。また、有限表示性（形式的平滑かつ局所有限表示ならば平滑である）は完全に圏論的に定義できるが、これらの定義が $\mathscr{A}$-スキームの場合にどのように振る舞うかはよく分かっていない。既に述べたように、付値環上の理論が重要となるが、ネーターでない局所環上では微分の理論はそのままでは上手くいかない。埋入次元が Krull 次元より低くなるなど、振る舞いがよくないのである。この点については既にいくつかある rigid 幾何学の理論の応用が効くと思われる。これらの理論が整備されることで、例えば Cartier 因子と Weil 因子の位置づけがより明瞭になる、特異点の構造が分かる、あるいは分類ができるなどの可能性が出てくる。

参考文献

[1] S. Boucksom, T. Fernex, C. Favre: *The volume on an isolated singularity*, to appear in Duke Math. J., Preprint, arXiv: mathAG/1011.2847