

## これまでの研究経過 (高木 聡)

博士課程の間は高次元 Weil-zeta 関数についての研究を進めていた。高次元 Weil-zeta 関数は偏極射影代数多様体上の固定された中間次元の有効サイクルの (各次数における) 個数の母関数として定義される。Wan[1] による定義では、この関数は複素解析的には収束半径が 0 となり、解析関数とはならず  $p$  進収束しかしない。これを、母関数の冪指数を変えて再定義したものが森脇 [2] の高次元 Weil-zeta 関数であり、これは複素解析関数となる。私は、有効サイクルが与えられた多様体に対して余次元 1 の場合については高次元 Weil-Zeta 関数の収束半径が偏極因子の自己交点数によって決まることを示した [3]。直線束のボリュウムという不変量の上限を与えるために、藤田の近似定理を正標数の場合に示している [4]。

サイクルの余次元が 2 以上の場合にも、いくつかの計算結果からこの収束半径が Néron-Severi 群 (の豊富錐) 上の区分的線形関数を与えることが予想される。すなわち、トロピカル幾何学との関連性が強く示唆されている。

トロピカル幾何学はおおまかに言って半環から概型のような幾何学的対象を構成する理論であるが、可換モノイドから概型のような幾何学的対象を構成する試みも別方面で提唱されている。これは「1 元体」 $\mathbb{F}_1$  上のスキームと呼ばれているもので、Riemann-zeta 関数を数論幾何的な議論に帰着させる重要な手段と考えられている。

そのため、2010 年度はトロピカル幾何学や、 $\mathbb{F}_1$  上の概型の理論を包含した枠組みの、 $\mathcal{A}$ -スキームの理論の構築を目指した [5]。この  $\mathcal{A}$ -スキームは、乗法モノイドの構造を含む良い性質をもつ代数系  $\mathcal{A}$  (例えば、 $\mathcal{A}$  はモノイド、半環、可換環の場合に成立) を固定した場合に、よい性質をもつ  $\mathcal{A}$  付き空間として定義される。この  $\mathcal{A}$ -スキームは代数系を可換環に限定した場合でも、従来の概型と比べて次のような特長がある [6]: この  $\mathcal{A}$ -スキームの圏は従来の概型を充満部分圏として含み、かつ包含関手はファイバー積と貼り合わせを保存する。また環の圏の反対圏との随伴関手であるスペクトラム関手を持つ。以上のように、 $\mathcal{A}$ -スキームは従来の概型に非常に近いとも言えるが、一方で  $\mathcal{A}$ -スキームは極限と余極限を自由にとることができるため、圏論的に非常に扱いやすい。

例として、Stone-Čech のコンパクト化の手法と同様にして、Zariski-Riemann 空間 (以下 ZR 空間) が  $\mathcal{A}$ -スキームとして構成できる。ZR 空間は与えられた非コンパクトな多様体の普遍コンパクト化であり、ボリュウムなどのような漸近的不変量を統一的に扱ううえで有効である。また、この ZR 空間を用いることで、永田の埋め込み定理が系として得られる。

## 参考文献

- [1] D. Wan: *Zeta functions of algebraic cycles over finite fields*, Manuscripta Math. vol.74 No.1 (1992) 413-444
- [2] A. Moriwaki: *The number of algebraic cycles with bounded degree*, J. Math. Kyoto Univ. 44 (2004) 819-890
- [3] S. Takagi: *The number of 1-codimensional cycles on projective varieties*, Kyoto J. Math. vol. 50-2 (2010) 247-266
- [4] S. Takagi: *Fujita's approximation theorem in positive characteristics*, J. Math. Kyoto Univ. vol. 47-1(2007) 179-202
- [5] S. Takagi: *Construction of schemes over  $\mathbb{F}_1$  and over idempotent semirings: towards tropical geometry*, Preprint, arXiv: mathAG/1009.0121
- [6] S. Takagi: *A-schemes and Zariski-Riemann spaces*, to appear in Rendiconti del Seminario Matematico della Univ. di Padova, Preprint, arXiv: mathAG/1101.2796