今後の研究計画

絡み目は閉ブレイド表示できることが分っている。その事実を踏まえ、河内明夫先生は次のプロジェクトを提案した。「閉ブレイド表示を用いて絡み目を順番に並べる。さらにその結果を使い、３次元多様体を並べる。」このプロジェクトに従い、長さが 10 までの多様体の分類表を完成した。

ここでプロジェクトの概要を述べておく。河内先生は、絡み目全体の集合に、ある整列順序を導入した。それは自然に、絡み目の外部の基本群 全体の集合上の整列順序を誘導し、最終的には連結で向き付け可能な３次元閉多様体全体の集合上の整列順序を導く。

絡み目全体の集合上の整列順序は次のように定められた。各絡み目に対し、lattice point とよばれる有限整数列をあてがうが、その数列の項数は絡み目を閉ブレイドで表わしたときの最小交点数に等しいものになっている。以後その項数を絡み目の長さとよぶ。定義は４段階に分かれ、その第１段階は、「２つの絡み目 L と L' について、L の長さが L' の長さより小さいなら、L は L' より小さい。」であり、第２段階以降は長さが等しい場合の大小関係を定めていくがここでは省略する。任意の自然数 n に対し、長さが n となるような絡み目は有限個しかないことが分っているので、絡み目を小さい順番に並べることができる。

次に多様体全体の集合上の整列順序であるが、連結で向き付け可能な３次元閉多様体全体の集合 $\mathbf{M}$ から素な絡み目全体の集合 $\mathbf{L}^p$ への単射 $\alpha : \mathbf{M} \to \mathbf{L}^p$ を次のように定めた。

写像 $\chi : \mathbf{L}^p \to \mathbf{M}$ を各 $L \in \mathbf{L}^p$ に対し、$\chi(L) = \chi(L, 0)$ ($= L$ で 0-surgery した多様体) と定めると、χ は全射であることが分っている。そこで、$M \in \mathbf{M}$ に対し、$\alpha(M) = \min\{L \in \chi^{-1}(M) : \ L' \in \chi^{-1}(M),\ \pi_1(E(L)) = \pi_1(E(L')) \Rightarrow L \leqq L'\}$ と定める。（ここに $E(L)$ は L の外部をあらわす。）

これにより、$\mathbf{M}$ を $\mathbf{L}^p$ の部分集合とみなし、整列順序を導入した。この順序のもとに $\mathbf{M}$ の元を小さい順番に並べることができる。

実際の作業は、先ず素な絡み目を列挙し、次に素な絡み目の外部の基本群の列挙を行い、最後に連結で向き付け可能な３次元閉多様体を列挙する。前記のように長さが 10 までの３次元多様体の列挙は完成している。

今後は長さが 11 までのテーブルに拡張するか、特定の多様体についてかなりの長さまで並べていく研究が考えられる。先ず後者の方針で、Poincare sphere が出現するまで homology sphere 達を並べていく。