

今後の研究計画

A. 拡散方程式の解の重心と時間無限大での挙動との関係

これまでの研究から全空間での拡散方程式に関して、解の時間無限大での挙動と重心の振る舞いと間に密接な関係が示唆されます。しかしながら、解の時間無限大での挙動に関する研究の多くは解の重心を考慮していないのが現状です。具体的な方程式でいえば、一般化された流速を持つ1次元単独粘性保存則の方程式 (M. Kato, Osaka Math. J., 44 (2007) 923–943) などが挙げられます。ここでは、その方程式を全空間において考察し、解の重心の振る舞いがいかにその解の時間無限大での挙動に影響するのかを探りたいと思います。

B. \mathbb{R}^2 での放物-楕円型 Keller–Segel 系

\mathbb{R}^2 における以下の放物-楕円型 Keller–Segel 系

$$(DD) \quad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ 0 = \Delta v + u, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

の構造は粘菌の初期総質量によって大きく変化します。実際、粘菌の初期総質量 8π がより大きければ解は有限時間で爆発しますが、粘菌の初期総質量が 8π より小さければ解は時間大域的で、時間が十分立つと、(DD) の自己相似解に漸近します。また、粘菌の初期総質量が丁度 8π であれば適当な条件に応じて時間大域解が定常解に漸近することや無限時刻爆発が起ります。

本研究では、次の問題を考察したいと思います。

粘菌の初期総質量 8π がより小さいとき、

- (1) 解の重心を考慮して自己相似解への収束の速さの改善

さらに、粘菌の初期総質量が 8π の下で、

- (2) 定常解への収束の速さの導出
- (3) 振動する解の構成

C. ある特別な感覚関数を持つ \mathbb{R}^2 での放物-楕円型の Keller–Segel 系

以下の方程式を考えます。ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は境界が滑らかな有界領域もしくは $\Omega = \mathbb{R}^2$ で、 $\psi(v) = v^p$ ($p > 0$) あるいは $\psi(v) = \log v$ とします (関数 $\psi(v)$ は感覚関数と呼ばれるものです)。

$$(GDD) \quad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla \psi(v)), & x \in \Omega, t > 0, \\ 0 = \Delta v - v + u, & x \in \Omega, t > 0. \end{cases}$$

領域が原点中心の円板で、 $u(x, 0)$ が球対称かつ非負な L^1 関数であるとき、永井・仙葉両氏は Neumann 境界条件の下で (GDD) を考察し、正值解が有限時間で爆発するかどうかを議論しました (T. Nagai and T. Senba, Adv. Math. Sci. Appl., 8 (1998) 145–156)。しかしながら、 $u(x, 0)$ が球対称でない場合については私が知る限りではよくわかっていないように思われます。ここでは、 $u(x, 0)$ の球対称性を仮定しないで、上のような感覚関数 $\psi(v)$ を持つ (GDD) の初期値問題を考察し、以下の問題について研究します：

- (1) 有限時間で爆発する正值解や時間大域的で正值である解の存在
- (2) 時間大域的で正值な解の時間無限大での挙動。

加えて、感覚関数の違いが解の振る舞いにどのように影響を及ぼすのかも明らかにします。