これまでの研究

走化性による細胞性粘菌の集中は Keller-Segel 系と呼ばれる移流拡散方程式で記述されます. このモデルは, 空間次元に依存して有限時刻爆発解が現れることが示唆され, 特に空間 2 次元の場合, 初期時刻における粘菌の個体数が解の構造において重要な役割を担うことが最近の研究で明らかになっています.

これまで私は主に $\mathbb{R}^n$ における以下の Keller-Segel 系

$$
\text{(KS)} \qquad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ \partial_t v = \Delta v - v + u, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}
$$

の解の時間無限大での挙動について研究してきました. これから今までの研究で得た成果を順に紹介します.

I. (KS) の解が時間大域的で有界であれば, 時間無限大で熱核に漸近することが知られています. 私は永井敏隆氏と共同で, 漸近形の第 1 項である熱核に続く第 2 項を決定し, 既知結果を大幅に改良しました (論文リスト [1, 8]).

II. Navier-Stokes 方程式で用いられている手法を上手く適用して, $n \geq 2$ の場合, 時空間で減衰する (KS) の解の高次漸近展開は空間次元の偶奇により異なることを明らかにしました (論文リスト [2]). このことは Navier-Stokes 方程式の場合と大きく異なる点です.

III. 時間大域的で有界である (KS) の解について, モーメント評価を導出し, それを上手く利用して高次漸近展開を導く方法を考案し解決しました (論文リスト [3, 7]). これにより [2] で課されていた解や初期値に関する仮定を弱められます. また, [3, 7] で用いられた手法は (KS) 以外の非線形移流拡散方程式系についても適用可能です.

IV. 重心を考慮して解の時間無限大での挙動を考えると, 既存研究で得られた熱核への収束の速さが改善されることを示しました. さらに, この結果から空間 1 次元と 2 次元のみではあるが、熱核への収束の速さは最適であることがわかりました (論文リスト [4, 5]). 従って, この結果から解の漸近挙動とその解の重心との間には密接な関係があることが示唆されます.

V. $\mathbb{R}^2$ における以下の方程式系を考えます.

$$
\text{(DD)} \qquad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v), & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ 0 = \Delta v + u, & x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}
$$

最近, 私は J. López-Gómez 氏と永井敏隆氏と共同で, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\,dx = 8\pi$ を満たす非負な L^1 関数で, さらにある fast-diffusion 方程式に関連する (リアプノフ) 汎関数の u_0 での値が有限であるならば, (DD) の解は時間大域的に存在し, その解は (DD) の定常解に漸近することを証明しました (論文リスト [6]).