

# これまでの研究成果のまとめ

吉脇 理雄

多元環の表現論とはその環の加群のなす圏の構造を調べる事である。申請者はこれまで導来圏とその間の同値関手、さらには導来同値の下での不変量について主に研究してきた。これらは多元環の表現論において重要な道具である。例えば Grothendieck 群や大域次元の有限性など多元環の重要な情報が導来同値の下で不変となっている。近年、これらはリー理論、非可換代数幾何などにおいて重要な役割を果たすことが分かってきている。

表現論において最も重要なホモロジー不変量は大域次元である。大域次元は様々な値をとり得るため、したがって、より精密な加群圏の性質を反映しているといえる。

Auslander は有限表現性などの表現論的な性質を大域次元などのホモロジー代数的な量で制御しようとする考えを基に、表現次元を実験的に提唱した。表現次元の概念自体は扱い易いものではなかったが、多元環の表現論に多くの興味深い問題を提供し、また近年のクラスター傾理論の一つの源流ともなった重要な概念である。

表現次元に関連して近年導入された概念に、三角圏の次元がある (Rouquier)。これも大域次元と同じく幾何学的な次元を圏論的に定式化しようとの試みである。特に多元環の導来次元や安定次元は大域次元や表現次元と密接な関係があり (Rouquier)、表現論的に興味深い。なお、導来次元や安定次元は導来同値不変量である (Rickard) ことに注意しよう。

したがって、導来次元や安定次元でもって多元環の表現論的な性質を制御できないかと考え、まずは低安定次元の自己入射多元環の表現論的な性質を調べることにした。定義より直ちに自己入射多元環が有限表現型ならばその安定次元は 0 になることがわかる。ではその逆は成り立つであろうかという自然な問題を申請者は肯定的に解決した (論文リスト [2])。これは多くの専門家が成り立つであろうと信じてはいたが、これまで証明は与えられていなかったものである。そして、その応用として Chen-Ye-Zhang の結果を改良し、導来次元が 0 の多元環と安定次元が 0 の自己入射多元環の間には密接な関係があることを示した (論文リスト [4] もしくは [3])。また、その改良と同じ道具を使って、polynomial growth 標準的自己入射多元環の安定次元は高々 1 となることも示した (論文リスト [3])。

ところで、安定次元 2 の自己入射多元環の例を与えるために、wild canonical 多元環の導来次元を確定したい (問題 A)。また、低導来次元の自己入射多元環の表現論的な性質を調べたい (問題 B)。それゆえ、canonical 多元環と自己入射多元環をともに含むクラスの多元環について、その導来次元を調べることにした。その多元環は Iwanaga-Gorenstein という。すなわち、自己入射次元が有限の多元環である。申請者は相原、荒谷、伊山、高橋と共同で、自己入射次元  $d$  の Iwanaga-Gorenstein 多元環において、Cohen-Macaulay (=CM) 加群圏から見た導来次元は高々  $d' = \max\{d, 1\}$  となることを示した (論文リスト [5])。特に、有限 CM 表現型ならば導来次元は高々  $d'$  である。これは大域次元が導来次元の上限を与える、という Rouquier の結果を回復する。今後はこれを使って、上述の問題 A, B に取り組みたい。