これまでの研究成果のまとめ

黒木慎太郎

ここでは Toric Topology に関する最近の結果に絞って述べます．以下に述べる番号は “List of achievements” の番号に対応しています．

トーラス作用の非可換な群作用への拡張に関連する研究． トーラス多様体とは $2n$ 次元の多様体で n 次元のトーラス T^n が不動点を持って作用するようなものの事を言います（例えば複素射影空間 $\mathbb{C}P$ や偶数次元の球面がトーラス多様体です）．Hattori-Masuda によって、トーリック多様体を位相的に飛躍的に一般化したクラスとして定義され、Toric Topology の中心的な対象として広く研究されています．

トーラス多様体上のトーラス作用がどのような群の作用に拡張するかを調べることは、『トーラス多様体上のもっとも自然な対称性を見つける』ことに関係してくるので重要な研究です．(14) では Masuda とともにトーラス多様体から定義される組み合わせ論的な対象である torus graph 上のルート系を定義し、それらが A, B, D 型しかないことを示しました。これによって、トーラス多様体上の拡張作用として現れるコンパクトリー群は A, B, D 型のものしかないことが分かります。

コホモロジー剛性問題に関連する研究． コホモロジー剛性問題とは、コホモロジー環の同型が多様体の同相を導くかを問う問題の事です．もちろん多様体全体で考えればこのような事は起きませんが、多様体のクラスを（例えばトーリック多様体等に）制限すると未解決問題になる場合があります．この問題は、トポロジーでは古典的でかつ中心的な『多様体上の位相的な完全不変量を探す問題』と考えることができるので重要な問題です．(10) で、Choi と共に (6), (9) で分類したトーラス多様体の（あるクラス $\mathcal{M}$ の）位相型をコホモロジー環と実特性類を用いて精密な分類を与えました．結果の帰結として、$\mathcal{M}$ のどのクラスでコホモロジー剛性が成立するのかが分かり、同時に Masuda-Suh が提出していたトーラス多様体上のコホモロジー剛性問題の反例も与えることができました．(15) では、8 次元の単連結なトーラス多様体で $H^2 = H^{odd} = 0$ を満たすものは、S^8 か $\# S^4 \times S^4$ と同相になることを示しました．(16) では、6 次元の equivariantly formal と言うトーラス多様体のクラスの特徴付けを与えています．

Toric hyperKähler 多様体（toric HK 多様体）とは、トーリック多様体のハイパーケーラー類似に当たるものです．これは $4n$ 次元の空間になり T^n の作用を持つものになります（例えば余接束 $T^*\mathbb{C}P$）．(11) では、同変コホモロジーの構造がその hyperhamiltonian な構造を決める事を示しました（同変コホモロジー剛性定理と呼べるものです）．

Small cover はトーリック多様体の実類似に当たるものです．これは n 次元の $\mathbb{Z}_2^n$-多様体になります（例えば $\mathbb{R}P^n$）．(12) では、Masuda-Yu とともに aspherical で virtually solvable な基本群を持つ small cover は real Bott 多様体しかないことを示しました．

(13) で、Suh と共に、$\mathbb{C}P$ バンドルを繰り返していった $\mathbb{C}P$-tower という空間の構造について研究しました．トーリック多様体の一種である generalized Bott tower や Milnor surface, A, C 型の Flag 多様体等はこの構造を持つ多様体の例です．この論文では 6 次元の $\mathbb{C}P$-tower のコホモロジー剛性を示し, 8 次元でコホモロジー剛性を満たさない例を与えました．

GKM グラフとグラフ同変コホモロジー環に関する研究． GKM 多様体とは、T^ℓ-多様体 $M^{2m} (m \geq \ell)$ で、その 1 次元以下の軌道空間がグラフの構造を持つものとして定義されます．例えば、上に述べた（$\mathbb{C}P$-tower を除く）多様体は全て GKM 多様体となり、非常に広大なクラスを成しています．GKM 多様体の 1 次元以下の軌道空間として出てくるグラフに tangential representation の情報を付けたものを GKM グラフと呼びます．

(17) で、toric HK 多様体から出てくる GKM グラフを抽象化し (ハイパートーラスグラフと呼んでいます) その上に定義されるグラフ同変コホモロジー環と言う不変量の環構造を決定しました．この結果から、toric HK 多様体よりも広いクラスの（(32) で定義した toric HK 多様体を位相的に拡張したようなクラスの）多様体の同変コホモロジー環を得ることができます．

(31) で、GKM 多様体が $SU(n)$ への拡張作用を持つような場合（でさらに特殊なもの）の GKM グラフが、組み合わせ論的にどのように特徴付けることができるかを調べました．具体的には、A 型のルート系とでも呼べるようなクラスが同変コホモロジーの中に存在する時に、その GKM グラフは完全グラフへの射影を持つか、そうでない場合は blow-up に似た操作をすることで完全グラフへの射影を持つような GKM グラフにすることができる事が分かりました．