今後の研究計画

問題 1　S を高々 ADE 特異点を持つか, または, 退化した重み付き $K3$ 曲面とする.

(1) 自己同型群 $\mathrm{Aut}(S)$ を求めよ. もし S の極小モデル $\tilde{S}$ が存在するならば $\mathrm{Aut}(S)$ と $\mathrm{Aut}(\tilde{S})$ を比較せよ.
(2) $\mathrm{Aut}(S)$ と $\mathrm{Aut}(\tilde{S})$ との違いを記述せよ.

$S_a \subset \boldsymbol{P}(a)$ と $S_b \subset \boldsymbol{P}(b)$ を異なる重み付き射影空間に含まれる十分一般の元とする.

(3) もし Picard 格子 $\mathrm{Pic}(S_a)$ と $\mathrm{Pic}(S_b)$ が等長同型ならば, 自己同型群 $\mathrm{Aut}(S_a)$ と $\mathrm{Aut}(S_b)$ が同型かどうかを調べよ.

問 1 では S の特異点解消を丁寧に調べることにより $\mathrm{Aut}(S)$ と $\mathrm{Aut}(\tilde{S})$ は計算可能と思われる. また, 大きな Picard 数を持つ $K3$ 曲面のモジュライのコンパクト化問題への応用が可能と考えられる.

問題 2　以下の **小林による事実** を bimodal 特異点や他のタイプの特異点に一般化せよ:

小林による事実　$S = (F = 0)$ を unimodal 特異点, $S^T = (F^T = 0)$ を Arnold の strange duality の意味での双対とする. 重み付き射影空間 $\boldsymbol{P}(a), \boldsymbol{P}(b)$ 内で S, S^T はそれぞれ $\widetilde{S}, \widetilde{S^T}$ にコンパクト化されるとし, Δ_F, Δ_{F^T} を F, F^T の Newton 多面体とする. 更に Δ_a (resp. Δ_b) を $\boldsymbol{P}(a), \boldsymbol{P}(b)$ の極多面体とする. このとき, $\Delta_b^* \subset \Delta \subset \Delta_a$ をみたす反射的多面体 Δ が存在して, その双対 $\Delta_a^* \subset \Delta^* \subset \Delta_b$ はまた反射的になるが, Δ は S と同値な型の特異点を与える. 更に, Δ に対応する部分族の Picard 格子は Δ_a に対応する族の Picard 格子に等長同型である.

問題 2 は Bergland-Hübsch ミラーペアの構成に現れる可逆多項式の分類が必要である. また, homological ミラー対称性理論や, 特異点から導かれる導来圏と $K3$ 曲面上の曲線の存在との関係の研究への応用が考えられる.

問題 3　S を非特異なトーリック超曲面とするとき, Picard 群 $\mathrm{Pic}(S)$ を多面体のデータを使って計算できるか.

古典的な問題であるが, 問題 3 は例えば S が 3 次元の非特異 Fano 3-fold や terminal 特異点を持つ Fano 3-fold の反標準因子である場合などに限っては部分的に解答が知られている. $\boldsymbol{Q}$-Picard 群 $\mathrm{Pic}(S)_{\boldsymbol{Q}}$ の研究はされているが, 一般には Picard 群 $\mathrm{Pic}(S)$ の生成元を見付けるのは難しい. S が 3 次元の非特異 Fano 3-fold の反標準因子である場合と同じように, 問題 3 はトーリック超曲面上の因子を丁寧に調べることが必要と考えられる.

以上のようにしてこの研究では複素代数幾何学的立場から $K3$ 曲面の自己同型群, Picard 格子, 数理物理における $K3$ 曲面の役割を理解することが目的である.