これまでの研究のまとめ

1. $K3$ 曲面族の元の間の双有理関係について

重み付き射影空間 $\boldsymbol{P}(a)$ の中の重み付き $K3$ 曲面族 $\mathcal{F}_a$ に対して, 族の Picard 格子 $\mathrm{Pic}(\mathcal{F}_a)$ を $\mathcal{F}_a$ の十分一般元の Picard 格子 として定義する.

定理 1 [Kobayashi-Mase] もし格子 $\mathrm{Pic}(\mathcal{F}_a), \mathrm{Pic}(\mathcal{F}_b)$ が等長同型ならば, $\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b$ に共通する部分族 $\mathcal{F}$ が存在し, $\mathcal{F}_a$ の一般元と $\mathcal{F}_b$ の一般元の間の双有理写像を導く. この対応は射影空間 $\boldsymbol{P}(a)$ と $\boldsymbol{P}(b)$ の中の単項式の間の具体的な写像により得られる. 部分族 $\mathcal{F}$ の Picard 格子 $\mathrm{Pic}(\mathcal{F})$ は Picard 格子 $\mathrm{Pic}(\mathcal{F}_a), \mathrm{Pic}(\mathcal{F}_b)$ に等長同型である. ■

定理 1 より, 族の元の間に双有理対応があるという意味で重み付き $K3$ 曲面族は本質的に 75 族であることがわかった.

定理 2 [Mase] 非特異 3 次元 トーリック Fano 多様体の中の $K3$ 曲面の族の Picard 格子は互いに相異なる. ■

定理 2 より, 非特異 3 次元 トーリック Fano 多様体の中の $K3$ 曲面族の元の間には双有理対応は存在しないことがわかった.

l, C をそれぞれ $\boldsymbol{P}^3$ の中の同じ超平面上に存在する直線, 非特異平面 3 次曲線とする; X' (resp. X) を $\boldsymbol{P}^3$ を l (resp. C) を中心に blow-up して得られる非特異 3 次元 Fano 多様体とする; $\mathcal{F}'$ (resp. $\mathcal{F}$) を X' (resp. X) の中の $K3$ 曲面族とする.

定理 3 [Mase] $\mathcal{F}'$ と $\mathcal{F}$ の一般元の間には射影変換から得られる双有理対応が具体的に構成される. ■

トーリック Calabi-Yau 超曲面の Gromov-Witten 不変量が計算できるプロトコルが存在することと定理 3 から, トーリックでない Fano 多様体 X の中の $K3$ 曲面族に対しても Gromov-Witten 不変量が計算できることが期待される.

2. $K3$ 曲面の自己同型について

X を非特異 3 次元トーリック多様体として, その極多面体を Δ とする. また, S を X の中の $K3$ 曲面であって, 多項式 $m_0 + m_1 + \ldots + m_r$ により定義されるものとする. ただし, m_0 は Δ の内部にある唯一の格子点に対応する単項式であり, $m_i (i = 1, \ldots, r)$ は Δ の頂点に対応する単項式である.

定理 4 [Mase-Taki] $\mathrm{Aut}_{\boldsymbol{T}}(S)$ を $\mathrm{Aut}(X)$ から制限されて得られる S の自己同型全体とする. このとき, 群 $\mathrm{Aut}_{\boldsymbol{T}}(S)$ は決定された. ■

定理 4 は多面体を調べることによってトーリック超曲面の自己同型群 (の部分群) を計算する方法を提案した.